ЖЭТФ, 2017, том 151, вып. 6, стр. 1179–1192 © 2017

НЕЛИНЕЙНОЕ ВИХРЕВОЕ ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЛАЖНОЙ АТМОСФЕРЕ

М. И. Копп [a,b], *А. В. Тур* [c*], *В. В. Яновский* [a,b**]

[a] *Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины*
61001, Харьков, Украина

[b] *Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*
61000, Харьков, Украина

[c] *Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie*
BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

Поступила в редакцию 10 февраля 2017 г.

Получен новый тип крупномасштабной неустойчивости во вращающейся стратифицированной влажной атмосфере с мелкомасштабной турбулентностью. Турбулентность возбуждается внешней мелкомасштабной силой с малым числом Рейнольдса. Теория построена на основе метода многомасштабных асимптотических разложений. Нелинейные уравнения для крупномасштабных движений получены в третьем порядке теории возмущений. Исследована линейная неустойчивость и стационарные нелинейные режимы. Получены решения в виде локализованных вихревых структур или кинков нового типа.

DOI: 10.7868/S0044451017060190

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что крупномасштабные вихревые структуры (КВС) типа тайфунов, торнадо, циклонов и антициклонов играют важную роль в динамике атмосферы Земли. Именно они определяют глобальный перенос воздушных масс, формируют погоду и климат как на нашей планете, так и на других планетах [1–6]. Характерные масштабы таких вихревых структур намного превышают характерные масштабы турбулентности или волн, на фоне которых они возникают. Поэтому их называют крупномасштабными. Исследование механизмов генерации КВС мелкомасштабной турбулентностью является одним из важных направлений в развитии нелинейной физики. Следует отметить, что особую роль в процессах генерации КВС в атмосфере Земли и других планет играет свободная конвекция или тепломассоперенос вещества в поле силы тяжести [7].

Возникновение КВС в конвективных системах изучалось в рамках как ламинарной теории [8], так и турбулентной [9–16]. Наибольшее развитие получила турбулентная теория (вихревое динамо), в которой показано существование крупномасштабной неустойчивости в конвективных системах с мелкомасштабной спиральной турбулентностью [9–11], вследствие которой образуется одна конвективная ячейка, интерпретируемая как огромный вихрь типа тропического циклона. Эта теория нашла подтверждение в ряде численных [12] и аналитических [13] расчетов. В работе [11] изучался процесс зарождения крупномасштабной неустойчивости в конвективной турбулентности с учетом фазовых переходов влаги. Там же было показано, что во влажной конвекции уменьшается порог неустойчивости, что эквивалентно появлению дополнительного источника энергии.

Крупномасштабная вихревая неустойчивость во вращающихся турбулентных потоках исследовалась во многих работах [14–18]. Так, при рассмотрении вращающихся конвективных систем были предприняты попытки применения полученных результатов к теории возникновения тропических циклонов. Дальнейшее развитие теория конвективного вихревого динамо получила в работах [19, 20], где был применен метод многомасштабных асимптотических разложений. Этот метод, в отличие от применяемой в работах [8–18] функциональной техники

* E-mail: Anatoly.Tour@irap.omp.eu
** E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

[21,22], позволяет строго выделить из всей иерархии возмущений главный порядок, в котором возникает неустойчивость. Впервые, для описания генерации КВС в отражательно-неинвариантной турбулентности метод многомасштабных асимптотических разложений был применен в работе [23]. В качестве малого параметра асимптотического разложения здесь использовалось число Рейнольдса $R \ll 1$ для мелкомасштабных пульсаций скорости, вызванных мелкомасштабной спиральной силой. Нелинейная стабилизация конвективной крупномасштабной неустойчивости, рассмотренной в работах [19, 20], приводит к образованию спиральных вихревых солитонов или кинков нового типа.

Новый тип крупномасштабной неустойчивости во вращающейся жидкости, подверженной действию мелкомасштабной внешней силы, был рассмотрен в работе [24]. В результате развития этой неустойчивости во вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой. Внешняя мелкомасштабная сила моделирует действие мелкомасштабной турбулентности и находится в плоскости XY, которая перпендикулярна оси вращения, т. е. ось Z направлена вдоль вектора угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$. Найденная в работе [24] неустойчивость принадлежит классу неустойчивостей, которые называют гидродинамическим α-эффектом. Настоящая работа посвящена обобщению этой неустойчивости на случай стратифицированной влажной атмосферы. Специальный выбор вида внешней мелкомасштабной силы, как и в работе [24], позволил учесть влияние силы Кориолиса и стратификации во влажной атмосфере.

Содержание работы изложено в следующих разделах: в разд. 2, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений, мы получили усредненные уравнения во вращающейся влажной атмосфере для крупномасштабных полей. Детали вывода уравнений многомасштабного асимптотического разложения приведены в Приложении А. Корреляционные функции, входящие в усредненные уравнения, выражаются через мелкомасштабные поля в нулевом приближении по R. Для получения усредненных уравнений в замкнутом виде в Приложении В найдены решения для мелкомасштабных полей нулевого порядка. Используя эти решения, в разд. 3 мы получили уравнения нелинейного вихревого динамо в замкнутом виде. Там же получена система уравнений для крупномасштабных возмущений скорости малой амплитуды, описывающая неустойчивость гидродинамического α-эффекта и определены критерии развития этой неустойчивости в зависимости от вращения и стратификации среды. Проведенный в разд. 4 численный анализ нелинейных уравнений в стационарном режиме показал существование локализованных спиральных вихревых структур типа кинков. Полученные результаты могут найти применение во многих задачах метеорологии.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ

Для описания процесса влажной конвекции запишем известную систему гидродинамических уравнений для возмущений скорости $\mathbf{v}$, температуры T, давления P и удельной водности m в приближении Буссинеска во вращающейся системе координат:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \nu \Delta v_i - \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k + \\ + g e_i (\beta T + \beta_1 m) + F_0^i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - A e_k v_k = \chi \Delta T + \frac{L}{c_p} K, \quad (2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v_k \frac{\partial m}{\partial x_k} - B e_k v_k = d \Delta m + K, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (1)–(4) описывает эволюцию возмущений на фоне основного равновесного состояния $\overline{T}(z)$, $\overline{\rho}(z)$, $\overline{m}(z)$, задаваемого постоянным градиентом температуры $\nabla \overline{T} = -A\mathbf{e}$ $(A > 0)$ (подгрев снизу), равновесным градиентом удельной водности $\nabla \overline{m} = -B\mathbf{e}$ $(B < 0)$ и гидростатическим давлением: $\nabla \overline{P} = \overline{\rho}\mathbf{g} - [\mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]]$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента жидкости. Здесь $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, направленный по оси Z, $\mathbf{g} = (0,\ 0,\ -g)$. Вектор угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$ считаем постоянным (твердотельное вращение) и направленным по оси Z, $\mathbf{\Omega} = (0,\ 0,\ \Omega)$. В уравнение теплового баланса (2) включен источник выделения скрытой теплоты конденсации насыщенного воздуха [11]:

$$Q = \frac{L}{c_p} K = \frac{L}{c_p} c A e_k v_k, \quad c = \frac{d q_n}{d\overline{T}}, \quad (5)$$

где L — удельная теплота конденсации водяного пара, c_p — теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении, K — скорость конденсации, q_n —

удельная насыщенная влажность или массовая доля насыщенного пара. Вектор $\mathbf{e} = (0,0,1)$ — единичный вектор в направлении оси Z, направленной вертикально вверх, β — коэффициент теплового расширения, $\beta_1 = -(1/\overline{\rho})\,(\partial\rho/\partial m)_{T,P}$, d — коэффициент диффузии, ν — коэффициент турбулентной вязкости. В уравнение Навье–Стокса (1) включена внешняя мелкомасштабная сила $\mathbf{F}_0$, которая моделирует источник возбуждения в среде мелкомасштабных и высокочастотных пульсаций поля скорости $\mathbf{v}_0$ с малым числом Рейнольдса $R = v_0 t_0/\lambda_0 \ll 1$. Собственно, ее основная роль состоит в поддержании небольшого уровня мелкомасштабных движений в присутствии диссипации. Здесь мы рассмотрим мелкомасштабную внешнюю силу $\mathbf{F}_0$ со следующими свойствами:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}_0 = 0, \quad \mathbf{F}_0 \operatorname{rot}\mathbf{F}_0 \neq 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{F}_0 = f_0 \mathbf{F}_0\left(\frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0}\right),$$

где λ_0 — характерный масштаб, t_0 — характерное время, f_0 — характерная амплитуда. Характерная скорость v_0, вызванная внешней силой, имеет следующие характерные масштабы: $v_0 = v_0\,(x/\lambda_0, t/t_0)$.

Для удобства введем безразмерные переменные

$$\begin{gathered}\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{\lambda_0}, \quad t \to \frac{t}{t_0}, \quad \mathbf{v} \to \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad \mathbf{F}_0 \to \frac{\mathbf{F}_0}{f_0}, \\ P \to \frac{P}{\overline{\rho} p_0}, \quad t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad p_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0}, \quad f_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \\ T \to \frac{T}{\lambda_0 A}, \quad m \to \frac{m}{\lambda_0 B}.\end{gathered} \tag{7}$$

При этом уравнения (1)–(4) принимают вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + R v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \Delta v_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + D\varepsilon_{ijk} v_j + \\ + e_i\left(\widetilde{\mathrm{Ra}}\, T + \widetilde{R}_m m\right) + F_0^i, \tag{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + R v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - a e_k v_k = \mathrm{Pr}^{-1}\,\Delta T, \tag{9}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + R v_k \frac{\partial m}{\partial x_k} - b e_k v_k = \mathrm{S}^{-1}\Delta m, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{11}$$

Здесь $\widetilde{\mathrm{Ra}} = \mathrm{Ra}/\mathrm{Pr}$, $\mathrm{Ra} = g\beta A\lambda_0^2/\nu\chi$ — число Рэлея на масштабе λ_0, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\widetilde{R}_m = R_m/\mathrm{S}$, $R_m = g\beta_1 B\lambda_0^4/\nu d$ — диффузионный аналог числа Рэлея на масштабе λ_0, $\mathrm{S} = \nu/d$ — число Шмидта, $D = 2\Omega\lambda_0^2/\nu$ — безразмерный параметр вращения на масштабе λ_0, связанный с числом Тейлора $\mathrm{Ta} = D^2$ [7] и являющийся характеристикой степени превалирования сил Кориолиса над вязкими силами, $a = 1 + (c/c_p)L$, $b = 1 + (cA/B)$. Малым параметром асимптотического разложения будем считать число Рейнольдса R мелкомасштабных движений, а параметры Ra, R_m и D будем считать произвольными, не влияющими на схему разложения.

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть на некотором участке атмосферы влажный воздух представляет собой смесь сухого воздуха, водяного пара и капель жидкой воды. В такой среде присутствуют мелкомасштабные и высокочастотные движения, которые поддерживаются внешней мелкомасштабной силой. Восходящие потоки воздуха закручиваются силой Кориолиса и сопровождаются конденсацией водяного пара в новую субстанцию, называемую водностью с выделением скрытой тепловой энергии. Стационарные вертикальные градиенты температуры и давления определяют отрицательный градиент насыщенного значения удельной влажности в атмосфере. Учет влияния фазовых переходов влаги может оказать существенное влияние на динамику крупномасштабных или усредненных полей. Исследование этого вопроса и является основной целью работы. При усреднении быстроосциллирующие мелкомасштабные осцилляции дают нуль. Однако из-за нелинейного взаимодействия между ними могут возникать члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными и их обращение в нуль является условием разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение и исследование уравнений разрешимости или, другими словами, замкнутых уравнений для крупномасштабных возмущений и является основной задачей этой работы.

Для построения многомасштабных асимптотических разложений используем метод развитый в работах [19, 20, 23]. Обозначим мелкомасштабные переменные $x_0 = (\mathbf{x}_0, t_0)$, а крупномасштабные $X = (\mathbf{X}, T)$. Производную $\partial/\partial x_0^i$ обозначим ∂_i, а производную $\partial/\partial t_0$ — ∂_t. Для обозначения крупномасштабных пространственных и временных производных будут использованы обозначения

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \equiv \nabla_i, \quad \frac{\partial}{\partial T} \equiv \partial_T.$$

Представим пространственные и временные производные в уравнениях (8)–(11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \to \partial_i + R^2\nabla_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \partial_t + R^4\partial_T. \tag{12}$$

При построении нелинейной теории переменные $\mathbf{v}$, T, m, P представим в виде асимптотических рядов:

$$\begin{gathered}
\mathbf{V}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{R}W_{-1}(X)+\mathbf{v}_0(x_0)+R\mathbf{v}_1+\\
+R^2\mathbf{v}_2+R^3\mathbf{v}_3+\ldots,\\
T(\mathbf{x},t)=\frac{1}{R}T_{-1}(X)+T_0(x_0)+RT_1+\\
+R^2T_2+R^3T_3+\ldots,\\
P(\mathbf{x},t)=\frac{1}{R^3}P_{-3}+\frac{1}{R^2}P_{-2}+\frac{1}{R}P_{-1}+P_0+\\
+R[P_1+\overline{P}_1(X)]+R^2P_2+R^3P_3+\ldots,\\
m(\mathbf{x},t)=\frac{1}{R}M_{-1}(X)+m_0(x_0)+\\
+Rm_1+R^2m_2+R^3m_3+\ldots
\end{gathered}\tag{13}$$

Подставляя разложения (12), (13) в систему уравнений (8)–(11) и собирая вместе члены с одинаковыми порядками по R до степени R^3 включительно, получаем уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (7)–(9) в различных порядках по R приведена в Приложении А. Там же показано, что именно в порядке R^3 получаются основные секулярные уравнения, или уравнения для крупномасштабных полей во влажной атмосфере:

$$\partial_T W_{-1}^i-\Delta W_{-1}^i+\nabla_k\left(\overline{v_0^k v_0^i}\right)=-\nabla_i\overline{P}_1,\tag{14}$$

$$\partial_T T_{-1}-\mathrm{Pr}^{-1}\Delta T_{-1}=-\nabla_k\left(\overline{v_0^k T_0}\right),\tag{15}$$

$$\partial_T M_{-1}-\mathrm{S}^{-1}\Delta M_{-1}=-\nabla_k\left(\overline{v_0^k m_0}\right).\tag{16}$$

Уравнения (14)–(16) дополняются секулярными уравнениями, полученными в Приложении А:

$$-\nabla_i P_{-3}+\widetilde{\mathrm{Ra}}\,e_i T_{-1}+e_i\widetilde{R}_m M+D\varepsilon_{ijk}W_{-1}^k=0,$$

$$\begin{gathered}
W_{-1}^k\nabla_k W_{-1}^i=-\nabla_i P_{-1},\\
W_{-1}^k\nabla_k T_{-1}=0,\\
W_{-1}^k\nabla_k M_{-1}=0,\\
\nabla_i W_{-1}^i=0,\\
W_{-1}^z=0.
\end{gathered}$$

Этим уравнениям удовлетворяют крупномасштабные поля бельтрамиевского типа:

$$\begin{gathered}
\mathbf{W}_{-1}=\left(W_{-1}^x(Z),W_{-1}^y(Z),0\right),\\
M_{-1}=M_{-1}(Z),\quad T_{-1}=T_{-1}(Z),\\
P_{-1}=\mathrm{const}.
\end{gathered}\tag{17}$$

В рамках квазидвумерной задачи крупномасштабные производные по Z предпочтительнее, т. е.

$$\nabla_Z\equiv\frac{\partial}{\partial Z}\gg\frac{\partial}{\partial X},\ \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Тогда система уравнений (14)–(16) упрощается и принимает следующий вид:

$$\partial_T W_1-\nabla_Z^2 W_1+\nabla_Z\left(\overline{v_0^z v_0^x}\right)=0,\quad W_1\equiv W_{-1}^x,\tag{18}$$

$$\partial_T W_2-\nabla_Z^2 W_2+\nabla_Z\left(\overline{v_0^z v_0^y}\right)=0,\quad W_2\equiv W_{-1}^y,\tag{19}$$

$$\partial_T T_{-1}-\mathrm{Pr}^{-1}\Delta T_{-1}+\nabla_Z\left(\overline{v_0^z T_0}\right)=0,\tag{20}$$

$$\partial_T M_{-1}-\mathrm{S}^{-1}\Delta M_{-1}+\nabla_Z\left(\overline{v_0^z m_0}\right)=0.\tag{21}$$

Система уравнений (18)–(21) описывает эволюцию крупномасштабных возмущений во вращающейся влажной атмосфере в рамках модели конденсационного тепловыделения (см. формулу (5)). Для исследования динамики крупномасштабного вихревого поля необходимо получить уравнения (18), (19) в замкнутом виде, т. е. вычислить напряжения Рейнольдса $\nabla_k\left(\overline{v_0^k v_0^i}\right)$, которые будут найдены в следующем разделе.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИХРЕВОГО ДИНАМО И КРУПНОМАСШТАБНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Для замыкания системы уравнений (18), (19), описывающих эволюцию крупномасштабных полей скорости $\mathbf{W}$, необходимо вычислить корреляторы следующего вида:

$$\begin{gathered}
T^{31}=\overline{w_0 u_0}=\overline{w_{01}(u_{01})^*}+\overline{(w_{01})^* u_{01}}+\\
+\overline{w_{03}(u_{03})^*}+\overline{(w_{03})^* u_{03}},
\end{gathered}\tag{22}$$

$$\begin{gathered}
T^{32}=\overline{w_0 v_0}=\overline{w_{01}(v_{01})^*}+\overline{(w_{01})^* v_{01}}+\\
+\overline{w_{03}(v_{03})^*}+\overline{(w_{03})^* v_{03}}.
\end{gathered}\tag{23}$$

Формулы (22), (23) определяют напряжения Рейнольдса, для вычисления которых нам потребуются выражения для мелкомасштабных полей скорости (95), явный вид которых приведен в Приложении В. После подстановки этих выражений в формулы (22), (23) находим

$$T^{31}=-2\left|C_1\right|^2+C_2A_2^*+C_2^*A_2,\tag{24}$$

$$T^{32}=-2\left|C_2\right|^2-\left(C_1A_1^*+C_1^*A_1\right).\tag{25}$$

Используя формулы (96), выпишем ряд полезных соотношений:

$$|C_{1,2}|^2 = C_{1,2}C_{1,2}^* = \frac{f_0^2}{16} \times \\ \times D^2 \left| \widehat{D}_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2} - \left(\widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\widehat{D}_{1,2}}{\widehat{D}_{\theta_{1,2}}} + \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\widehat{D}_{1,2}}{\widehat{D}_{m_{1,2}}} \right) \right|^{-2},$$

$$C_{1,2}A_{1,2}^* + C_{1,2}^*A_{1,2} = \frac{f_0^2}{2} \times \\ \times D \left(1 - \widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\mathrm{Pr}^{-1}}{\left|\widehat{D}_{\theta_{1,2}}\right|^2} - \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\mathrm{S}^{-1}}{\left|\widehat{D}_{m_{1,2}}\right|^2} \right) \times \\ \times \left| \widehat{D}_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2} - \left(\widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\widehat{D}_{1,2}}{\widehat{D}_{\theta_{1,2}}} + \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\widehat{D}_{1,2}}{\widehat{D}_{m_{1,2}}} \right) \right|^{-2}.$$

Подставляя эти соотношения в формулы (23), (24), находим выражения для напряжений Рейнольдса:

$$T^{31} = -\frac{f_0^2}{8} \times \\ \times D^2 \left| \widehat{D}_1^2 + \frac{D^2}{2} - \left(\widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\widehat{D}_1}{\widehat{D}_{\theta_1}} + \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\widehat{D}_1}{\widehat{D}_{m_1}} \right) \right|^{-2} + \\ + \frac{f_0^2}{2} D \left(1 - \widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\mathrm{Pr}^{-1}}{\left|\widehat{D}_{\theta_2}\right|^2} - \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\mathrm{S}^{-1}}{\left|\widehat{D}_{m_2}\right|^2} \right) \times \\ \times \left| \widehat{D}_2^2 + \frac{D^2}{2} - \left(\widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\widehat{D}_2}{\widehat{D}_{\theta_2}} + \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\widehat{D}_2}{\widehat{D}_{m_2}} \right) \right|^{-2}, \quad (26)$$

$$T^{32} = -\frac{f_0^2}{8} \times \\ \times D^2 \left| \widehat{D}_2^2 + \frac{D^2}{2} - \left(\widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\widehat{D}_2}{\widehat{D}_{\theta_2}} + \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\widehat{D}_2}{\widehat{D}_{m_2}} \right) \right|^{-2} - \\ - \frac{f_0^2}{2} D \left(1 - \widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\mathrm{Pr}^{-1}}{\left|\widehat{D}_{\theta_1}\right|^2} - \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\mathrm{S}^{-1}}{\left|\widehat{D}_{m_1}\right|^2} \right) \times \\ \times \left| \widehat{D}_1^2 + \frac{D^2}{2} - \left(\widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\widehat{D}_1}{\widehat{D}_{\theta_1}} + \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\widehat{D}_1}{\widehat{D}_{m_1}} \right) \right|^{-2}. \quad (27)$$

В результате уравнения (18), (19) замыкаются и принимают вид

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 + \nabla_Z T^{31} = 0, \quad (28)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \nabla_Z T^{32} = 0. \quad (29)$$

Раскрывая модули, запишем напряжения Рейнольдса (26), (27) в явном виде:

$$T^{31} = -\frac{f_0^2}{8} \times \\ \times D^2 \left\{ 16\,(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + R_1 \left[4 + (1-W_1)^2 \right] + \frac{D^2}{2}\Phi_1 \right\}^{-1} + \\ + \frac{f_0^2}{2} D \left(1 - \widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\mathrm{Pr}^{-1}}{4\,\mathrm{Pr}^{-2} + (1-W_2)^2} - \right. \\ \left. - \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\mathrm{S}^{-1}}{4\mathrm{S}^{-2} + (1-W_2)^2} \right) \times \\ \times \left\{ 16\,(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + R_2 \left[4 + (1-W_2)^2 \right] + \frac{D^2}{2}\Phi_2 \right\}^{-1}, \quad (30)$$

$$T^{32} = -\frac{f_0^2}{8} \times \\ \times D^2 \left\{ 16\,(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + R_2 \left[4 + (1-W_2)^2 \right] + \frac{D^2}{2}\Phi_2 \right\}^{-1} - \\ - \frac{f_0^2}{2} D \left(1 - \widetilde{\mathrm{Ra}} \frac{a}{2} \frac{\mathrm{Pr}^{-1}}{4\,\mathrm{Pr}^{-2} + (1-W_1)^2} - \right. \\ \left. - \widetilde{R}_m \frac{b}{2} \frac{\mathrm{S}^{-1}}{4\mathrm{S}^{-2} + (1-W_1)^2} \right) \times \\ \times \left\{ 16\,(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2 \right]^2 + \right. \\ \left. + R_1 \left[4 + (1-W_1)^2 \right] + \frac{D^2}{2}\Phi_1 \right\}^{-1}. \quad (31)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R_{1,2} = \frac{a^2}{4} \frac{\widetilde{\mathrm{Ra}}^2}{4\,\mathrm{Pr}^{-2} + (1-W_{1,2})^2} + \\ + \frac{b^2}{4} \frac{\widetilde{R}_m^2}{4\mathrm{S}^{-2} + (1-W_{1,2})^2} + \frac{ab}{4} \widetilde{\mathrm{Ra}} \widetilde{R}_m \times \\ \times \frac{8\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{Pr}^{-1} + 2\,(1-W_{1,2})^2}{\left[4\,\mathrm{Pr}^{-2} + (1-W_{1,2})^2\right]\left[4\mathrm{S}^{-2} + (1-W_1)^2\right]} + \Phi_{1,2},$$

$$\Phi_{1,2} = -\widetilde{\mathrm{Ra}}\frac{a}{2}\,\frac{8\,\mathrm{Pr}^{-1}-2\left(1-W_{1,2}\right)^2}{4\,\mathrm{Pr}^{-2}+\left(1-W_{1,2}\right)^2} - \\ - \widetilde{R}_m\frac{b}{2}\,\frac{8\mathrm{S}^{-1}-2\left(1-W_{1,2}\right)^2}{4\mathrm{S}^{-2}+\left(1-W_{1,2}\right)^2}.$$

Формулы (30), (31) несколько упрощаются, если свойства среды таковы, что числа Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ и числа Шмидта $\mathrm{S} = \nu/d$ равны единице, $\mathrm{Pr} = \mathrm{S} = 1$. В результате находим

$$T^{31} = -\frac{f_0^2}{8}D^2\left(4+\widetilde{W}_1^2\right)\times \\ \times\left\{\left(4+\widetilde{W}_1^2\right)\left[16\widetilde{W}_1^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_1^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]- \right. \\ \left. -\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_1^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_1^2\right)\right\}^{-1}+ \\ +\frac{f_0^2}{2}D\left(4+\widetilde{W}_2^2-\frac{\widetilde{R}}{2}\right)\times \\ \times\left\{\left(4+\widetilde{W}_2^2\right)\left[16\widetilde{W}_2^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_2^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]- \right. \\ \left. -\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_2^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_2^2\right)\right\}^{-1}, \quad (32)$$

$$T^{32} = -\frac{f_0^2}{8}D^2\left(4+\widetilde{W}_2^2\right)\times \\ \times\left\{\left(4+\widetilde{W}_2^2\right)\left[16\widetilde{W}_2^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_2^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]- \right. \\ \left. -\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_2^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_2^2\right)\right\}^{-1}- \\ -\frac{f_0^2}{2}D\left(4+\widetilde{W}_1^2-\frac{\widetilde{R}}{2}\right)\times \\ \times\left\{\left(4+\widetilde{W}_1^2\right)\left[16\widetilde{W}_1^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_1^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]- \right. \\ \left. -\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_1^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_1^2\right)\right\}^{-1}. \quad (33)$$

В формулах (32), (33) приняты обозначения $\widetilde{W}_1 = 1 - W_1$, $\widetilde{W}_2 = 1 - W_2$, $\widetilde{R} = aRa + bR_m$. Как правило, в атмосферной конвекции равновесный градиент удельной водности мал, $|B| \ll c\,|A|$, и, принимая во внимание, что $|L/c_p| \gg |\beta_1/\beta|$, выражение для $\widetilde{R}$ можно представить в виде суммы:

$$\widetilde{R} = \left(1 + L\frac{c}{c_p}\right)\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra} + R_q,$$

где $\mathrm{Ra} = g\beta A\lambda_0^4/\nu^2$ — число Рэлея для «сухой» конвекции при $\nu = \chi = d$, $R_q = g\beta\left(\gamma_m - \gamma_a\right)/\nu^2$ — число, характеризующее интенсивность конденсационного тепловыделения [8], γ_m — влажноадиабатический и $\gamma_a = g/c_p$ — сухоадиабатический градиенты, связанные соотношением [25]

$$\gamma_m = \gamma_a + \frac{L}{c_p}\,\frac{dq_n}{dz}. \quad (34)$$

Заметим, что для случая однородной среды ($\widetilde{\mathrm{Ra}} = \widetilde{R}_m = 0$) формулы (32), (33) совпадают с результатами работы [24]. Уравнения (28), (29) соответствуют уравнениям нелинейного вихревого динамо во вращающейся влажной атмосфере с мелкомасштабной внешней силой. Если эффект вращения исчезнет ($\Omega = 0$) или амплитуда внешней силы равна нулю ($f_0 = 0$), то происходит обычное диффузионное расплывание крупномасштабных полей.

Так же как в работах [19,20,24], рассмотрим вначале устойчивость малых возмущений, а затем исследуем вопрос о возможном существовании стационарных структур. При малых значениях $W_{1,2}$ напряжения Рейнольдса (32), (33) можно разложить в ряд по $W_{1,2}$. С учетом формулы

$$\left|\widehat{D}_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2} - \frac{\widetilde{R}}{2}\right|^{-2} \approx \alpha_0 + \alpha W_{1,2} + \ldots, \quad (35)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{4}{\left(D^2+6\right)^2 + 64 + \widetilde{R}^2 - 12\widetilde{R}\left(1+\dfrac{D^2}{10}\right)},$$

$$\alpha = \frac{32D^2\left(10 - D^2 + \widetilde{R}\left(1+\dfrac{D^2}{10}\right) + \dfrac{3}{50}\widetilde{R}D^2\right)}{\left(\left(D^2+6\right)^2 + 64 + \widetilde{R}^2 - 12\widetilde{R}\left(1+\dfrac{D^2}{10}\right)\right)^2},$$

получаем линеаризованные уравнения (28), (29):

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 = \alpha_1\nabla_Z W_1 - \alpha_2\nabla_Z W_2, \quad (36)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 = \alpha_1\nabla_Z W_2 + \alpha_2\nabla_Z W_1. \quad (37)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{8}D^2\alpha, \quad \alpha_2 = \frac{f_0^2}{2}D\left(\alpha\left(1-\frac{\widetilde{R}}{10}\right)-\alpha_0\frac{\widetilde{R}}{25}\right).$$

Решение линейной системы уравнений (36), (37) будем искать в виде плоских волн с волновым вектором $\mathbf{K}$, параллельным оси Z, т. е.

$$W_{1,2} = A_{W_{1,2}}\exp\left(-i\omega T + iKZ\right). \quad (38)$$

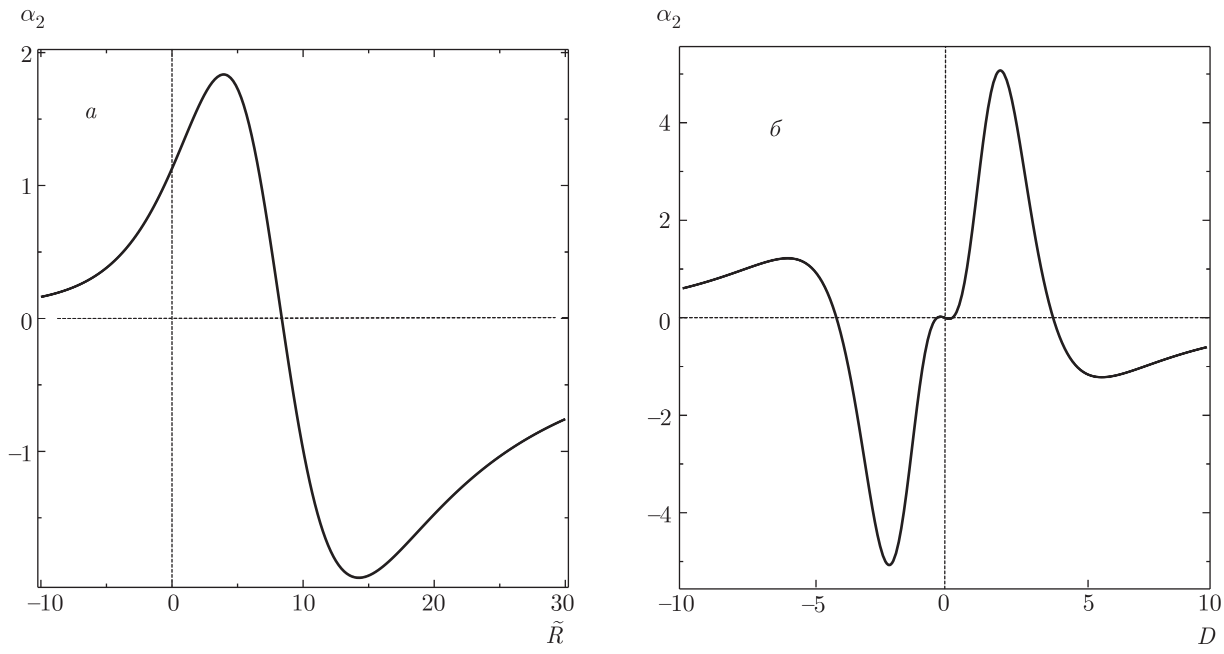


Рис. 1. Зависимости α-эффекта от параметра стратификации среды $\widetilde{R}$ (a) и от параметра вращения среды D ($б$)

Подставим (38) в систему уравнений (36), (37) и получим дисперсионное уравнение

$$\left(-i\omega + K^2 - i\alpha_1 K\right)^2 - \alpha_2^2 K^2 = 0. \quad (39)$$

Представив ω из уравнения (39) в виде $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, находим

$$\omega_0 = \mathrm{Re}\,\omega = -\alpha_1 K, \quad \Gamma = \mathrm{Im}\,\omega = \pm\alpha_2 K - K^2. \quad (40)$$

Решения (40) указывают на существование неустойчивых колебательных решений для крупномасштабных вихревых возмущений. Заметим, что для малых амплитуд крупномасштабных возмущений, коэффициент усиления α_2 зависит от амплитуды внешней силы f_0 (интенсивности турбулентности), параметра вращения D и параметра стратификации $\widetilde{R}$, включающего в себя характеристики «сухой» Ra и «влажной» R_q конвекций. Выясним сначала, как изменяются значения α_2 в зависимости от параметра $\widetilde{R}$ при фиксированном параметре вращения $D = 1$ и амплитуде внешней силы $f_0 = 10$. Функциональная зависимость $\alpha_2(\widetilde{R})$ изображена на рис. 1.

Значение коэффициента α_2 при $\widetilde{R} = 0$ соответствует однородной среде. В этом пределе генерация крупномасштабных вихревых возмущений вызвана действием вешней мелкомасштабной силы и силы Кориолиса [24]. На рис. 1 видно, что наличие температурной стратификации ($\mathrm{Ra} \neq 0$) и дополнительного источника конденсационного тепловыделения ($R_q \neq 0$) может привести к увеличению коэффициента α_2 и, как следствие, к более быстрой генерации крупномасштабных вихревых возмущений, чем в однородной среде. При некотором критическом значении параметра стратификации $\widetilde{R} = \widetilde{R}_0$ генерация возмущений пропадает, поскольку $\alpha_2 = 0$. Далее, при числах $\widetilde{R} > \widetilde{R}_0$ происходит изменение знака коэффициента усиления α_2. Тогда нарастающая мода станет затухающей, и наоборот.

Представляет также интерес выяснить влияние эффекта вращения среды на коэффициент усиления α_2 или процесс генерации крупномасштабных возмущений. Для этих целей зафиксируем значение параметра $\widetilde{R} = 2$ и амплитуду внешней силы $f_0 = 10$. В этом случае функциональная зависимость $\alpha_2(D)$ изображена на рис. 1*б*. Анализ зависимости $\alpha_2(D)$ от параметра вращения D показывает, что при «быстром» вращении ($D \to \infty$) происходит уменьшение коэффициента $\alpha_2 \to 0$, т. е. подавление α-эффекта. Из графика зависимости $\alpha_2(D)$ видно, что существуют значения параметра D, при которых генерация вихревых возмущений пропадает ($\alpha_2 = 0$). Графическое изображение совместного влияния эффекта вращения и стратификации в плоскости $(D, \widetilde{R})$ представлено на рис. 2*a*. Здесь область неустойчивости $\alpha_2 > 0$ выделена серым цветом.

Максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma_{max} = \alpha_2^2/4$ достигается на волновых числах $K_{max} = \alpha_2/2$. График зависимости (рис. 2*б*) инкремента неустойчивости Γ от волновых чисел K имеет

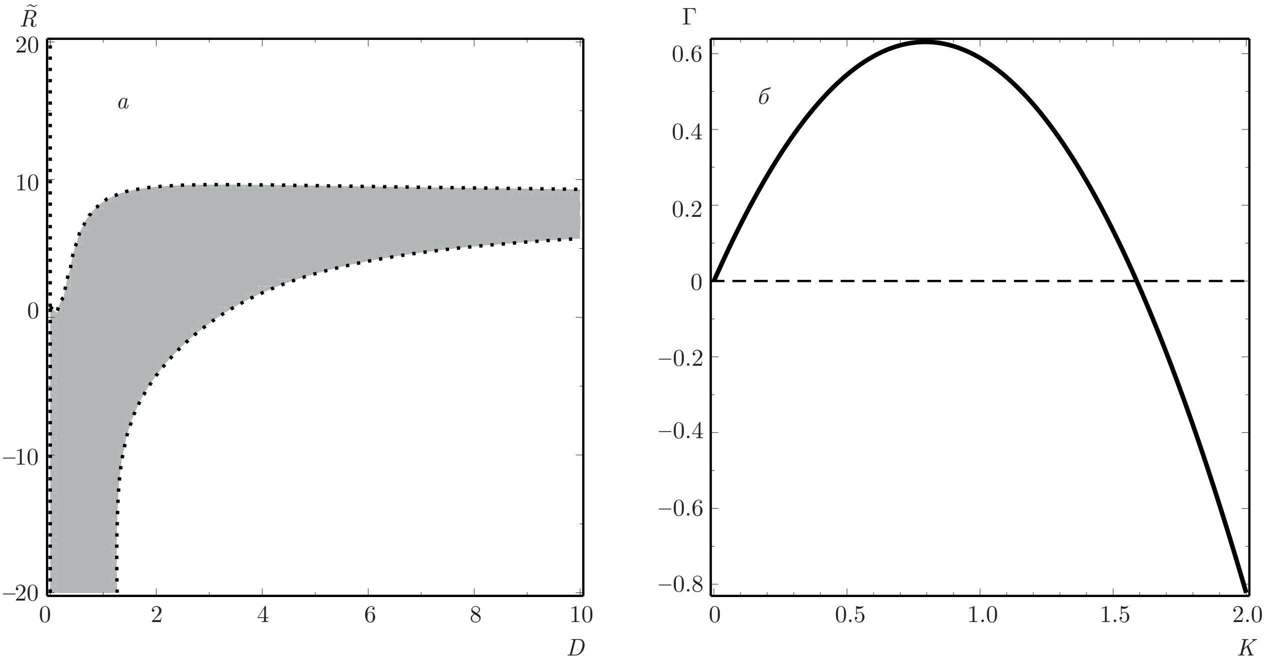


Рис. 2. *а*) График для α_2 в плоскости $(D, \widetilde{R})$: серая область соответствует положительным значениям α_2 (неустойчивые решения), а белые области — отрицательным значениям α_2. *б*) Зависимость инкремента неустойчивости от волновых чисел K для параметров $D = 1$, $\widetilde{R} = 2$ и $f_0 = 10$

стандартный вид, характерный для α-эффекта. В результате развития крупномасштабной неустойчивости во вращающейся влажной атмосфере генерируются крупномасштабные спиральные циркулярно-поляризованные вихри бельтрамиевского типа.

В заключение раздела оценим характерный пространственный масштаб неустойчивой моды $L_{max} \sim 1/\alpha_2$ и характерный временной масштаб ее нарастания $T_{max} \sim 1/\alpha_2^2$ в условиях возникновения гидродинамического α-эффекта во вращающейся влажной атмосфере. Для этого вычислим коэффициент α_2, используя типичные характеристики атмосферной турбулентности. Так, следуя работе [26], выбираем характерную скорость $v_0 \simeq 0.1$ м/с и масштаб пульсаций $\lambda_0 \simeq 10^3$ м, турбулентную вязкость $\nu \simeq 10^5$ м^2/с аналогично [27]. Тогда характерное время турбулентных пульсаций $t_0 = \lambda_0^2/\nu \simeq 10$ с и, соответственно, величина параметра вращения $D = 2\Omega\lambda_0^2/\nu \simeq 1.4 \cdot 10^{-3}$ (угловая скорость вращения Земли $\Omega \approx 7 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$) и число Рейнольдса $R = v_0\lambda_0/\nu \simeq 10^{-3}$. Сравним безразмерные параметры D, Ra, R_m по отношению к числу Рейнольдса R: $D/R > 1$, $\mathrm{Ra}/R = \beta A \cdot 10^6 > 1$, $R_m/R = \beta_1 B \cdot 10^6 > 1$, что согласуется со схемой асимптотического разложения, используемого в работе. Малость параметра вращения D позволяет пренебречь членами порядка D^2 при оценке коэффициента α_2:

$$\alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} Dk, \tag{41}$$

где величина $k \approx 4.5 \cdot 10^{-2}$ вычислена согласно формулам (35) для параметра стратификации $\widetilde{R} = 5$. Выразим гидродинамическую спиральность $\alpha_v \simeq (t_0/3)\overline{\mathbf{v}_0 \operatorname{rot} \mathbf{v}_0}$(см., например, [11]) через безразмерную амплитуду источника:

$$\alpha_v = \frac{t_0 v_0^2}{3\lambda_0} f_0^2. \tag{42}$$

Здесь f_0 — безразмерная амплитуда внешней силы, входящая в формулу (41). При выводе этой формулы предполагается наличие баланса между источником и диссипацией, что соответствует стационарному случаю. Подставляя (42) в (41), находим выражения для характерных пространственного и временного масштабов:

$$\begin{aligned} L_{max} &\approx \frac{2}{3} \frac{\alpha_v}{v_0 R} Dk = 106 \text{ км}, \\ T_{max} &\approx \frac{4}{9} \frac{t_0 v_0^2 R^2}{\alpha_v^2 D^2 k^2} = 1.3 \text{ дн}. \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь коэффициент гидродинамической спиральности мы считали равным $\alpha_v \approx 10^{-2}$ м/с [28].

Таким образом, мы получили вполне приемлемые оценки характерных масштабов неустойчивости, которые могут объяснить происхождение крупномасштабной спиральной структуры облачных мезовихрей [29], тайфунов на начальной стадии развития.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ

Очевидно, что с ростом амплитуды возмущений $W_{1,2}$ нелинейные члены уменьшаются и неустойчивость насыщается. В результате образуются нелинейные вихревые структуры. Для их нахождения положим $\partial_T = 0$ в уравнениях (28), (29) и проинтегрируем их один раз по Z. В итоге получим систему нелинейных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{W}_1}{dZ} &= -D^2\frac{f_0^2}{8}\left(4+\widetilde{W}_1^2\right)\times \\
&\times\left\{\left(4+\widetilde{W}_1^2\right)\left[16\widetilde{W}_1^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_1^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]-\right. \\
&\left.-\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_1^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_1^2\right)\right\}^{-1}+ \\
&+D\frac{f_0^2}{2}\left(4+\widetilde{W}_2^2-\frac{\widetilde{R}}{2}\right)\times \\
&\times\left\{\left(4+\widetilde{W}_2^2\right)\left[16\widetilde{W}_2^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_2^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]-\right. \\
&\left.-\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_2^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_2^2\right)\right\}^{-1}+C_1, \qquad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{W}_2}{dZ} &= -D^2\frac{f_0^2}{8}\left(4+\widetilde{W}_2^2\right)\times \\
&\times\left\{\left(4+\widetilde{W}_2^2\right)\left[16\left(1-W_2\right)^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_2^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]-\right. \\
&\left.-\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_2^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_2^2\right)\right\}^{-1}- \\
&-D\frac{f_0^2}{2}\left(4+\widetilde{W}_1^2-\frac{\widetilde{R}}{2}\right)\times \\
&\times\left\{\left(4+\widetilde{W}_1^2\right)\left[16\widetilde{W}_1^2+\left[\frac{D^2}{2}+4-\widetilde{W}_1^2\right]^2+\frac{\widetilde{R}^2}{4}\right]-\right. \\
&\left.-\widetilde{R}\left(16-\widetilde{W}_1^4\right)-D^2\frac{\widetilde{R}}{2}\left(4-\widetilde{W}_1^2\right)\right\}^{-1}+C_2. \qquad (45)
\end{aligned}$$

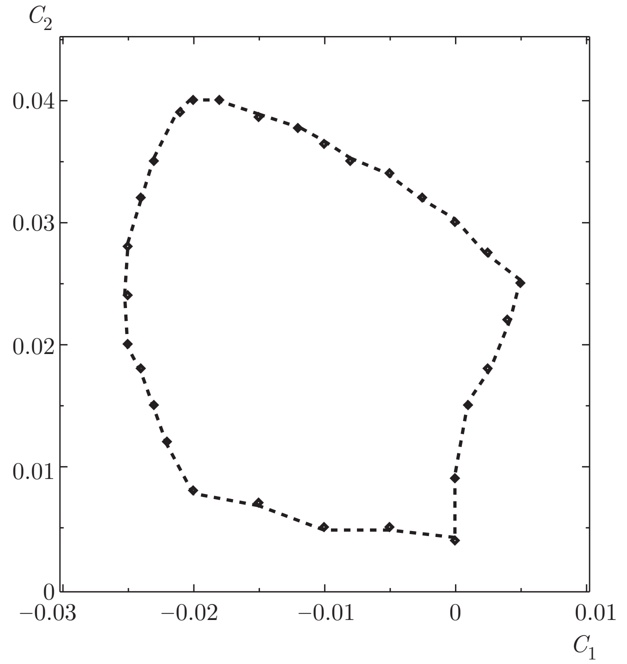


Рис. 3. Штриховой линией отмечена граница области параметров на плоскости (C_1, C_2), при которых на фазовом портрете присутствуют две неподвижные точки. Внутри этой области появляются четыре неподвижные точки: две гиперболические и устойчивый и неустойчивый фокусы. Вне этой области неподвижные точки отсутствуют. Область построена численно при $f_0 = D = 1$, $\widetilde{R} = 2$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования. Выясним теперь, какие типы стационарных вихревых структур описываются системой уравнений (44), (45).

Начнем качественный анализ системы уравнений (44), (45), полагая для простоты расчетов безразмерные параметры турбулентности f_0, вращения D и стратификации $\widetilde{R}$ соответственно равными $f_0 = D = 1$, $\widetilde{R} = 2$.

Тогда при фиксированных значениях этих параметров фазовый портрет уравнений (44), (45) определяется значениями постоянных C_1 и C_2. Стандартными методами можно доказать, что система уравнений (44), (45) имеет четыре неподвижные точки в области, показанной на рис. 3. Вне этой области неподвижные точки отсутствуют. На границе реализуются вырожденные случаи двух неподвижных точек. При небольшом изменении значений параметра, например D, область существования четырех неподвижных точек незначительно деформируется и меняет свои размеры и форму.

При значениях постоянных C_1 и C_2 (см. рис. 3), когда присутствуют четыре неподвижные точки,

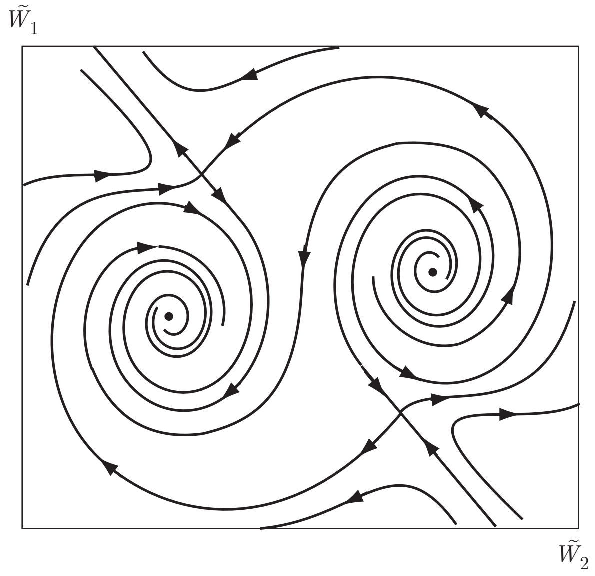


Рис. 4. Фазовый портрет системы уравнений (44), (45) при $f_0 = D = 1$, $\widetilde{R} = 2$, $C_1 = -0.01$ и $C_2 = 0.01$. Видно присутствие двух гиперболических особых точек и устойчивого и неустойчивого фокусов

установим тип неподвижных точек, линеаризуя векторное поле (44), (45) в окрестности неподвижных точек. В случае четырех неподвижных точек две из них гиперболические, остальные две — устойчивый и неустойчивый фокус. Положение и тип неподвижных точек позволяют построить фазовый портрет системы (44), (45). Знание фазового портрета позволяет качественно описать все возможные стационарные вихревые решения. Типичный фазовый портрет системы уравнений (44), (45) показан на рис. 4.

Наиболее интересные локализованные решения соответствуют траекториям фазового портрета, соединяющим неподвижные точки на фазовой плоскости. В частности, сепаратриса, соединяющая гиперболическую особую точку с устойчивым фокусом, соответствует решению для локализованной вихревой структуры типа кинка с вращением. Это решение, приведенное на рис. 5, получено численным интегрированием.

Другой вид спирального кинка соответствует решению, для которого на фазовой плоскости сепаратриса связывает неустойчивый и устойчивый фокусы (см. рис. 5). Всем этим решениям соответствуют крупномасштабные локализованные вихревые структуры типа кинков с вращением, которые порождаются найденной в работе неустойчивостью. Полученные здесь новые вихревые структуры аналогичны ранее найденным для однородной вращающейся жидкости [24].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

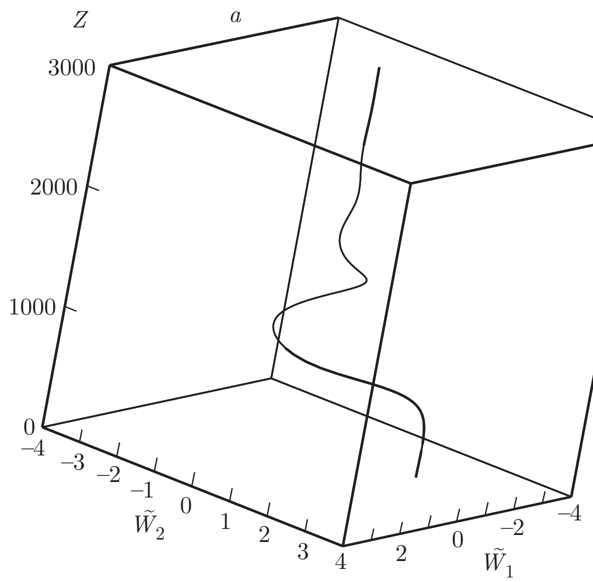
В работе получена замкнутая система нелинейных уравнений для вихревых крупномасштабных возмущений (вихревое динамо), описывающих как линейную, так и нелинейную стадии нарастания возмущений в стратифицированной влажной вращающейся атмосфере с внешней мелкомасштабной силой. Внешняя сила поддерживает малые флуктуации поля скорости и создает мелкомасштабную турбулентность с малым числом Рейнольдса $R \ll 1$. Асимптотическое разложение уравнений движения по малому числу Рейнольдса позволяет получить уравнения движения для больших масштабов. Учет эффектов стратификации во вращающейся среде (для нашей задачи это — температурный подогрев и дополнительный источник конденсационного тепловыделения) приводит к усилению крупномасштабных возмущений. Особенно заметна роль этих эффектов при малых параметрах вращения D (см. рис. 2*a*). В этом случае тепловая энергия среды наиболее эффективно трансформируется в энергию мелкомасштабных движений с ненулевой спиральностью $h = \overline{\mathbf{v}_0 \operatorname{rot} \mathbf{v}_0} \neq 0$. Спиральность мелкомасштабного поля скорости обусловлена не только действием силы Кориолиса, как в однородной среде [24], но и стратификацией влажной атмосферы. Это обстоятельство приводит к появлению новой неустойчивости типа α-эффекта, в результате которой генерируются крупномасштабные вихревые структуры.

В работе рассмотрена линейная стадия генерации крупномасштабных вихревых возмущений и определена область возникновения этой неустойчивости в зависимости от параметров вращения D и стратификации $\widetilde{R}$. Размер и форма области неустойчивости естественно изменяются в зависимости от интенсивности турбулентности. С ростом амплитуды вихревых возмущений неустойчивость стабилизируется и переходит в стационарный режим. В этом режиме мы получили численным методом нелинейные стационарные решения в виде спиральных кинков, подобные тем, которые были найдены в однородной вращающейся жидкости [24].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнения многомасштабного асимптотического разложения

Приведем алгебраическую структуру асимптотического разложения уравнений (8)–(11) в различ-



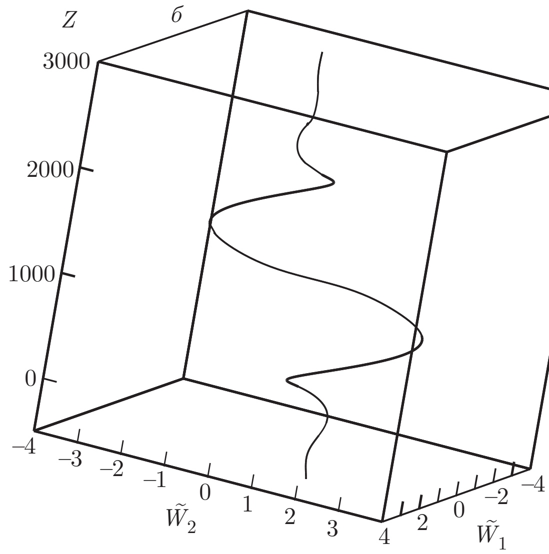


Рис. 5. *а*) Кинк, связывающий гиперболическую точку с устойчивым фокусом; при подходе к устойчивому фокусу видны вращения поля скорости. *б*) Кинк, связывающий неустойчивый и устойчивый фокусы; видна внутренняя спиральная структура кинка; решения получены при параметрах $f_0 = D = 1$, $\widetilde{R} = 2$ и $C_1 = -0.01$, $C_2 = 0.01$

ных порядках по R, начиная с наименьшего. В порядке R^{-3} имеется только одно уравнение

$$\partial_i P_{-3} = 0 \;\Rightarrow\; P_{-3} = P_{-3}(X). \qquad (46)$$

В порядке R^{-2} имеем уравнение

$$\partial_i P_{-2} = 0 \;\Rightarrow\; P_{-2} = P_{-2}(X). \qquad (47)$$

В порядке R^{-1} получаем систему уравнений

$$\partial_t W_{-1}^i + W_{-1}^k \partial_k W_{-1}^i = -\partial_i P_{-1} - \nabla_i P_{-3} + \\ + \partial_k^2 W_{-1}^i + D\varepsilon_{ijk} W_{-1}^j e_k + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_{-1} + \widetilde{R}_m e_i M_{-1}, \qquad (48)$$

$$\partial_t T_{-1} - \mathrm{Pr}^{-1}\,\partial_k^2 T_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k T_{-1} + a W_{-1}^z, \qquad (49)$$

$$\partial_t M_{-1} - \mathrm{S}^{-1} \partial_k^2 M_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k M_{-1} + b W_{-1}^z, \qquad (50)$$

$$\partial_i W_{-1}^i = 0. \qquad (51)$$

Усреднение уравнений (47)–(51) по быстрым переменным дает секулярные уравнения

$$-\nabla_i P_{-3} + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_{-1} + e_i \widetilde{R}_m M_{-1} + \\ + D\varepsilon_{ijk} W_{-1}^j e_k = 0, \qquad (52)$$

$$W_{-1}^z = 0. \qquad (53)$$

В нулевом порядке R^0 имеем следующую систему уравнений:

$$\partial_t v_0^i + W_{-1}^k \partial_k v_0^i + v_0^k \partial_k W_{-1}^i = -\partial_i P_0 - \nabla_i P_{-2} + \\ + \partial_k^2 v_0^i + D\varepsilon_{ijk} v_0^j e_k + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_0 + \widetilde{R}_m e_i m_0 + F_0^i, \qquad (54)$$

$$\partial_t T_0 - \mathrm{Pr}^{-1}\,\partial_k^2 T_0 = -W_{-1}^k \partial_k T_0 - \\ - \partial_k (v_0^k T_{-1}) + a v_0^z, \qquad (55)$$

$$\partial_t m_0 - \mathrm{S}^{-1} \partial_k^2 m_0 = -W_{-1}^k \partial_k m_0 - \\ - \partial_k (v_0^k M_{-1}) + b v_0^z, \qquad (56)$$

$$\partial_i v_0^i = 0. \qquad (57)$$

Эти уравнения дают один секулярный член:

$$\nabla P_{-2} = 0 \;\Rightarrow\; P_{-2} = \mathrm{const}. \qquad (58)$$

Рассмотрим приближение первого порядка R^1:

$$\partial_t v_1^i + W_{-1}^k \partial_k v_1^i + v_0^k \partial_k v_0^i + v_1^k \partial_k W_{-1}^i + \\ + W_{-1}^k \nabla_k W_{-1}^i = -\nabla_i P_{-1} - \partial_i \left(P_1 + \overline{P}_1\right) + \\ + \partial_k^2 v_1^i + 2\partial_k \nabla_k W_{-1}^i + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_1 + \widetilde{R}_m e_i m_1 + \\ + D\varepsilon_{ijk} v_1^j e_k, \qquad (59)$$

$$\partial_t T_1 - \mathrm{Pr}^{-1}\,\partial_k^2 T_1 - \mathrm{Pr}^{-1}\, 2\partial_k \nabla_k T_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k T_1 - \\ - W_{-1}^k \nabla_k T_{-1} - v_0^k \partial_k T_0 - v_1^k \partial_k T_{-1} + a v_1^z, \qquad (60)$$

$$\partial_t m_1 - \mathrm{S}^{-1} \partial_k^2 m_1 - \mathrm{S}^{-1} 2\partial_k \nabla_k M_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k m_1 - \\ - W_{-1}^k \nabla_k M_{-1} - v_0^k \partial_k m_0 - v_1^k \partial_k M_{-1} + b v_1^z, \qquad (61)$$

$$\partial_i v_1^i + \nabla_i W_{-1}^i = 0. \qquad (62)$$

Из этой системы уравнений следуют секулярные уравнения

$$W_{-1}^k \nabla_k W_{-1}^i = -\nabla_i P_{-1}, \tag{63}$$

$$W_{-1}^k \nabla_k T_{-1} = 0, \tag{64}$$

$$W_{-1}^k \nabla_k M_{-1} = 0, \tag{65}$$

$$\nabla_i W_{-1}^i = 0. \tag{66}$$

Секулярные уравнения (63)–(66) удовлетворяют следующей геометрии полей:

$$\begin{gathered}\mathbf{W}_{-1} = \left(W_{-1}^x(Z), W_{-1}^y(Z), 0\right),\\ M_{-1} = M_{-1}(Z), \quad T_{-1} = T_{-1}(Z),\\ P_{-1} = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{67}$$

Для второго порядка R^2 получим уравнения

$$\begin{gathered}\partial_t v_2^i + W_{-1}^k \partial_k v_2^i + v_0^k \partial_k v_1^i + W_{-1}^k \nabla_k v_0^i + v_0^k \nabla_k W_{-1}^i +\\ + v_1^k \partial_k v_0^i + v_2^k \partial_k W_{-1}^i = -\nabla_i P_2 - \nabla_i P_0 +\\ + \partial_k^2 v_2^i + 2\partial_k \nabla_k v_0^i + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_2 + \widetilde{R}_m e_i m_2 +\\ + D\varepsilon_{ijk} v_2^j e_k,\end{gathered} \tag{68}$$

$$\begin{gathered}\partial_t T_2 - \mathrm{Pr}^{-1}\,\partial_k^2 T_2 - \mathrm{Pr}^{-1}\,2\partial_k \nabla_k T_0 = -W_{-1}^k \partial_k T_2 -\\ - W_{-1}^k \nabla_k T_0 - v_0^k \partial_k T_1 - v_0^k \nabla_k T_{-1} -\\ - v_1^k \partial_k T_0 - v_2^k \partial_k T_{-1} + a v_2^z,\end{gathered} \tag{69}$$

$$\begin{gathered}\partial_t m_2 - \mathrm{S}^{-1}\partial_k^2 m_2 - \mathrm{S}^{-1} 2\partial_k \nabla_k m_0 = -W_{-1}^k \partial_k m_2 -\\ - W_{-1}^k \nabla_k m_0 - v_0^k \partial_k m_1 - v_0^k \nabla_k M_{-1} -\\ - v_1^k \partial_k m_0 - v_2^k \partial_k M_{-1} + b v_2^z,\end{gathered} \tag{70}$$

$$\partial_i v_2^i + \nabla_i v_0^i = 0. \tag{71}$$

После усреднения системы уравнений (68)–(71) по быстрым переменным видно, что в порядке R^2 секулярных членов нет. Наконец приходим к наиболее важному порядку R^3. В этом порядке уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\partial_t v_3^i + \partial_T W_{-1}^i + W_{-1}^k \partial_k v_3^i + v_0^k \partial_k v_2^i + W_{-1}^k \nabla_k v_1^i +\\ + v_0^k \nabla_k v_0^i + v_1^k \partial_k v_1^i + v_1^k \nabla_k W_{-1}^i + v_2^k \partial_k v_0^i +\\ + v_3^k \partial_k W_{-1}^i = -\partial_i P_3 - \nabla_i\left(P_1 + \overline{P}_1\right) + \partial_k^2 v_3^i +\\ + 2\partial_k \nabla_k v_1^i + \Delta W_{-1}^i + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_3 + \widetilde{R}_m e_i m_3 +\\ + D\varepsilon_{ijk} v_2^j e_k,\end{gathered} \tag{72}$$

$$\begin{gathered}\partial_t T_3 + \partial_T T_{-1} - \mathrm{Pr}^{-1}\,\partial_k^2 T_3 - \mathrm{Pr}^{-1}\,2\partial_k \nabla_k T_1 -\\ - \mathrm{Pr}^{-1}\,\Delta T_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k T_3 - W_{-1}^k \nabla_k T_1 - v_0^k \partial_k T_2 -\\ - v_0^k \nabla_k T_0 - v_1^k \nabla_k T_1 - v_1^k \nabla_k T_{-1} - v_2^k \partial_k T_0 -\\ - v_3^k \partial_k T_{-1} + a v_3^z,\end{gathered} \tag{73}$$

$$\begin{gathered}\partial_t m_3 + \partial_T M_{-1} - \mathrm{S}^{-1}\partial_k^2 m_3 - \mathrm{S}^{-1} 2\partial_k \nabla_k m_1 -\\ - \mathrm{S}^{-1}\Delta M_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k m_3 - W_{-1}^k \nabla_k m_1 -\\ - v_0^k \partial_k m_2 - v_0^k \nabla_k m_0 - v_1^k \nabla_k m_1 - v_1^k \nabla_k M_{-1} -\\ - v_2^k \partial_k m_0 - v_3^k \partial_k M_{-1} + b v_3^z,\end{gathered} \tag{74}$$

$$\partial_i v_3^i + \nabla_i v_1^i = 0. \tag{75}$$

Усредняя эту систему уравнений по быстрым переменным, получим основные секулярные уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных возмущений во влажной атмосфере:

$$\partial_T W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k\left(\overline{v_0^k v_0^i}\right) = -\nabla_i \overline{P}_1, \tag{76}$$

$$\partial_T T_{-1} - \mathrm{Pr}^{-1}\,\Delta T_{-1} = -\nabla_k\left(\overline{v_0^k T_0}\right), \tag{77}$$

$$\partial_T M_{-1} - \mathrm{S}^{-1}\Delta M_{-1} = -\nabla_k\left(\overline{v_0^k m_0}\right). \tag{78}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Мелкомасштабные поля в нулевом порядке по R

Рассмотрим уравнения (54)–(57) для нулевого порядка по R, полученные в Приложении А. Вводя для операторов обозначения

$$\begin{gathered}\widehat{D}_0 = \partial_t - \partial^2 + W_{-1}^k \partial_k,\\ \widehat{D}_m = \partial_t - \mathrm{S}^{-1}\partial^2 + W_{-1}^k \partial_k,\\ \widehat{D}_\theta = \partial_t - \mathrm{Pr}^{-1}\,\partial^2 + W_{-1}^k \partial_k,\end{gathered} \tag{79}$$

систему уравнений (54)–(57) можем записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\widehat{D}_0 v_0^i = -\partial_i P_0 + D\varepsilon_{ijk} v_0^j e_k + \widetilde{\mathrm{Ra}} e_i T_0 +\\ + \widetilde{R}_m e_i m_0 + F_0^i,\end{gathered} \tag{80}$$

$$\widehat{D}_m m_0 = b e_k v_0^k, \tag{81}$$

$$\widehat{D}_\theta T_0 = a e_k v_0^k. \tag{82}$$

Используя условие соленоидальности полей $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{F}_0$, исключим из уравнения (80) давление P_0:

$$P_0 = \frac{D\left(\partial_x v_0^y - \partial_y v_0^x\right)}{\partial^2} + \frac{\widetilde{\mathrm{Ra}}\partial_z T_0}{\partial^2} + \frac{\widetilde{R}_m \partial_z m_0}{\partial^2}. \tag{83}$$

Из уравнений (81), (82) находим выражения для мелкомасштабной температуры T_0 и удельной водности m_0:

$$T_0 = \frac{a v_0^z}{\widehat{D}_\theta}, \quad m_0 = \frac{b v_0^z}{\widehat{D}_m}. \tag{84}$$

Подставляя (84) в (83), получим выражение для P_0:

$$P_0 = \frac{D\left(\partial_x v_0^y - \partial_y v_0^x\right)}{\partial^2} + \left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\partial^2 \widehat{D}_\theta} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\partial^2 \widehat{D}_m}\right)\partial_z v_0^z. \quad (85)$$

Используя формулу (85), можем исключить давление из уравнения (80) и в результате получить систему уравнений для нахождения поля скорости нулевого приближения:

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{11} v_0^x + \widehat{p}_{12} v_0^y + \widehat{p}_{13} v_0^z &= F_0^x, \\ \widehat{p}_{21} v_0^x + \widehat{p}_{22} v_0^y + \widehat{p}_{23} v_0^z &= F_0^y, \\ \widehat{p}_{31} v_0^x + \widehat{p}_{32} v_0^y + \widehat{p}_{33} v_0^z &= F_0^z. \end{aligned} \quad (86)$$

Компоненты тензора $\widehat{p}_{ij}$ имеют вид

$$\begin{gathered} \widehat{p}_{11} = \widehat{D}_0 - D\frac{\partial_x \partial_y}{\partial^2}, \quad \widehat{p}_{12} = D\frac{\partial_x^2}{\partial^2} - D, \\ \widehat{p}_{13} = \left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_\theta} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_m}\right)\frac{\partial_x \partial_z}{\partial^2}, \\ \widehat{p}_{21} = -\left(D\frac{\partial_y^2}{\partial^2} - D\right), \\ \widehat{p}_{22} = \widehat{D}_0 + D\frac{\partial_x \partial_y}{\partial^2}, \\ \widehat{p}_{23} = \left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_\theta} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_m}\right)\frac{\partial_y \partial_z}{\partial^2}, \\ \widehat{p}_{31} = -D\frac{\partial_z \partial_y}{\partial^2}, \quad \widehat{p}_{32} = D\frac{\partial_z \partial_x}{\partial^2}, \\ \widehat{p}_{33} = \widehat{D}_0 + \left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_\theta} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_m}\right)\left(\frac{\partial_z^2}{\partial^2} - 1\right). \end{gathered} \quad (87)$$

Для решения системы уравнений (86) зададим внешнюю силу $\mathbf{F}_0$ в явном виде. Пусть внешняя сила $\mathbf{F}_0$ задана в плоскости xy, ортогональной оси вращения и удовлетворяет всем свойствам (6), т. е.

$$\mathbf{F}_0 = f_0\left(\mathbf{e}_x \cos\phi_2 + \mathbf{e}_y \cos\phi_1\right), \quad F_0^z = 0, \quad (88)$$

где f_0 — амплитуда внешней силы, $\phi_1 = \boldsymbol{\kappa}_1 \mathbf{x} - \omega_0 t$, $\phi_2 = \boldsymbol{\kappa}_2 \mathbf{x} - \omega_0 t$, $\kappa_1 = \kappa_0(1,0,1)$, $\kappa_2 = \kappa_0(0,1,1)$. Решение системы уравнений (35), как известно, находится по правилу Крамера:

$$\begin{aligned} v_0^x = u_0 &= \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\widehat{p}_{22}\widehat{p}_{33} - \widehat{p}_{32}\widehat{p}_{23}\right)F_0^x + \right. \\ &+ \left.\left(\widehat{p}_{13}\widehat{p}_{32} - \widehat{p}_{12}\widehat{p}_{33}\right)F_0^y + \left(\widehat{p}_{12}\widehat{p}_{23} - \widehat{p}_{13}\widehat{p}_{22}\right)F_0^z\right\}, \\ v_0^y = v_0 &= \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\widehat{p}_{23}\widehat{p}_{31} - \widehat{p}_{21}\widehat{p}_{33}\right)F_0^x + \right. \\ &+ \left.\left(\widehat{p}_{11}\widehat{p}_{33} - \widehat{p}_{13}\widehat{p}_{31}\right)F_0^y + \left(\widehat{p}_{13}\widehat{p}_{21} - \widehat{p}_{11}\widehat{p}_{23}\right)F_0^z\right\}, \\ v_0^z = w_0 &= \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\widehat{p}_{21}\widehat{p}_{32} - \widehat{p}_{22}\widehat{p}_{31}\right)F_0^x + \right. \\ &+ \left.\left(\widehat{p}_{12}\widehat{p}_{31} - \widehat{p}_{11}\widehat{p}_{32}\right)F_0^y + \left(\widehat{p}_{11}\widehat{p}_{22} - \widehat{p}_{12}\widehat{p}_{21}\right)F_0^z\right\}. \end{aligned} \quad (89)$$

Здесь Δ — детерминант системы уравнений (86), который в раскрытом виде имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta = \widehat{p}_{11}\widehat{p}_{22}\widehat{p}_{33} + \widehat{p}_{21}\widehat{p}_{32}\widehat{p}_{13} + \widehat{p}_{12}\widehat{p}_{23}\widehat{p}_{31} - \widehat{p}_{13}\widehat{p}_{22}\widehat{p}_{31} - \\ - \widehat{p}_{32}\widehat{p}_{23}\widehat{p}_{11} - \widehat{p}_{21}\widehat{p}_{12}\widehat{p}_{33}. \end{aligned} \quad (90)$$

Для удобства вычисления выражений (89), (90) запишем внешнюю силу (88) в комплексной форме:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{e}_x \frac{f_0}{2}\, e^{i\phi_2} + \mathbf{e}_y \frac{f_0}{2} e^{i\phi_1} + \text{c.c.} \quad (91)$$

Тогда все операторы в формулах (89), (90) действуют слева на собственные функции:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{0,\theta,m} e^{i\phi_1} &= e^{i\phi_1}\widehat{D}_{0,\theta,m}\left(\boldsymbol{\kappa}_1,\ -\omega_0\right), \\ \widehat{D}_{0,\theta,m} e^{i\phi_2} &= e^{i\phi_2}\widehat{D}_{0,\theta,m}\left(\boldsymbol{\kappa}_2,\ -\omega_0\right), \\ \Delta e^{i\phi_1} &= e^{i\phi_1}\Delta\left(\boldsymbol{\kappa}_1,\ -\omega_0\right), \\ \Delta e^{i\phi_2} &= e^{i\phi_2}\Delta\left(\boldsymbol{\kappa}_2,\ -\omega_0\right). \end{aligned} \quad (92)$$

Полагая $\kappa_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, обозначим

$$\begin{gathered} \widehat{D}_0\left(\boldsymbol{\kappa}_1,\ -\omega_0\right) = \widehat{D}_1^* = 2 - i\left(1 - W_1\right), \\ \widehat{D}_0\left(\boldsymbol{\kappa}_2,\ -\omega_0\right) = \widehat{D}_2^* = 2 - i\left(1 - W_2\right), \\ W_1 = W_{-1}^x, \quad W_2 = W_{-1}^y, \\ \widehat{D}_\theta\left(\boldsymbol{\kappa}_1,\ -\omega_0\right) = \widehat{D}_{\theta_1}^* = 2\,\mathrm{Pr}^{-1} - i\left(1 - W_1\right), \\ \widehat{D}_\theta\left(\boldsymbol{\kappa}_2,\ -\omega_0\right) = \widehat{D}_{\theta_2}^* = 2\,\mathrm{Pr}^{-1} - i\left(1 - W_2\right), \\ \widehat{D}_m\left(\boldsymbol{\kappa}_1,\ -\omega_0\right) = \widehat{D}_{m_1}^* = 2\mathrm{S}^{-1} - i\left(1 - W_1\right), \\ \widehat{D}_m\left(\boldsymbol{\kappa}_2,\ -\omega_0\right) = \widehat{D}_{m_2}^* = 2\mathrm{S}^{-1} - i\left(1 - W_2\right). \end{gathered} \quad (93)$$

Комплексно-сопряженные величины здесь и далее обозначаем звездочкой. При выполнении дальнейших вычислений часть компонент в тензорах $\widehat{p}_{ij}\left(\vec{\kappa}_1\right)$ и $\widehat{p}_{ij}\left(\vec{\kappa}_2\right)$ обращается в нуль, поэтому выпишем только ненулевые компоненты:

$$\begin{gathered} \widehat{p}_{11}\left(\boldsymbol{\kappa}_1\right) = \widehat{D}_1^*, \quad \widehat{p}_{12}\left(\vec{\kappa}_1\right) = -\frac{D}{2}, \\ \widehat{p}_{13}\left(\boldsymbol{\kappa}_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_{\theta_1}^*} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_{m_1}^*}\right), \\ \widehat{p}_{22}\left(\boldsymbol{\kappa}_1\right) = \widehat{D}_1^*, \quad \widehat{p}_{32}\left(\boldsymbol{\kappa}_1\right) = \frac{D}{2}, \\ \widehat{p}_{33}\left(\boldsymbol{\kappa}_1\right) = \widehat{D}_1^* - \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_{\theta_1}^*} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_{m_1}^*}\right), \\ \widehat{p}_{11}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = \widehat{D}_2^*, \\ \widehat{p}_{12}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = -D, \quad \widehat{p}_{21}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = \frac{D}{2}, \\ \widehat{p}_{22}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = \widehat{D}_2^*, \\ \widehat{p}_{23}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_{\theta_2}^*} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_{m_2}^*}\right), \quad \widehat{p}_{31}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = -\frac{D}{2}, \\ \widehat{p}_{33}\left(\boldsymbol{\kappa}_2\right) = \widehat{D}_2^* - \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}_{\theta_2}^*} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}_{m_2}^*}\right). \end{gathered} \quad (94)$$

Учитывая формулы (92)–(94), находим поле скорости нулевого приближения:

$$\begin{aligned} u_0 &= C_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} + \text{c.c.} = \\ &= u_{01} + u_{02} + u_{03} + u_{04}, \\ v_0 &= A_1 e^{i\phi_1} - C_2 e^{i\phi_2} + \text{c.c.} = \\ &= v_{01} + v_{02} + v_{03} + v_{04}, \\ w_0 &= -C_1 e^{i\phi_1} + C_2 e^{i\phi_2} + \text{c.c.} = \\ &= w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04}. \end{aligned} \tag{95}$$

Здесь $w_{02} = (w_{01})^*$, $w_{04} = (w_{03})^*$, $v_{02} = (v_{01})^*$, $v_{04} = (v_{03})^*$, $u_{02} = (u_{01})^*$, $u_{04} = (u_{03})^*$ и введены новые обозначения

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{f_0}{2}\left[\widehat{D}^*_{1,2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}^*_{\theta_{1,2}}} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}^*_{m_{1,2}}}\right)\right] \times \\ &\times \left\{\widehat{D}^*_{1,2}\left[\widehat{D}^*_{1,2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}^*_{\theta_{1,2}}} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}^*_{m_{1,2}}}\right)\right] + \frac{D^2}{2}\right\}^{-1}, \\ C_{1,2} &= \frac{f_0}{4} D \left\{\widehat{D}^*_{1,2}\left[\widehat{D}^*_{1,2} - \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{a\widetilde{\mathrm{Ra}}}{\widehat{D}^*_{\theta_{1,2}}} + \frac{b\widetilde{R}_m}{\widehat{D}^*_{m_{1,2}}}\right)\right] + \frac{D^2}{2}\right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{96}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, *Теоретические основы геофизической гидродинамики*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1988).
2. О. Г. Онищенко, О. А. Похотелов, Н. М. Астафьева, УФН **178**, 605 (2008).
3. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные вихри в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
4. Г. Д. Абурджания, *Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах*, КомКнига, Москва (2006).
5. А. В. Колесниченко, М. Я. Маров, *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред*, БИНОМ, Москва (2009).
6. А. В. Тур, В. В. Яновский, *Гидродинамические вихревые структуры*, НТК «Институт монокристаллов» НАН Украины, Харьков (2012).
7. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
8. Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник, УФН **183**, 497 (2013).
9. С. С. Моисеев, П. Б. Руткевич, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **94**(2), 144 (1988).
10. Е. А. Лупян, А. А. Мазуров, П. Б. Руткевич, А. В. Тур, ЖЭТФ **102**, 1540 (1992).
11. С. С. Моисеев, К. Р. Оганян, П. Б. Руткевич и др., в сб. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, Наук. думка, Киев (1990), с. 280.
12. G. V. Levina, S. S. Moiseev, and P. B. Rutkevitch, Adv. Fluid Mech. **25**, 111 (2000).
13. В. Д. Зимин, Г. В. Левина, С. С. Моисеев, А. В. Тур, ДАН СССР **309**, 88 (1989).
14. П. Б. Руткевич, ЖЭТФ **104**, 4010 (1993).
15. L. L. Kitchatinov, G. Rudiger, and G. Khomenko, Astron. Astrophys. **287**, 320 (1994).
16. L. M. Smith and F. Waleffe, Phys. Fluids **11**, 1608 (1999).
17. L. M. Smith and F. Waleffe, J. Fluid Mech. **451**, 145 (2002).
18. Ю. А. Березин, В. П. Жуков, Изв. АН СССР, сер. МЖГ вып. 6, 61 (1990).
19. A. V. Tur and V. V. Yanovsky, arXiv:1204.5024v.1.
20. A. V. Tur and V. V. Yanovsky, Open J. Fluid Dynam. **3**, 64 (2013).
21. Е. А. Новиков, ЖЭТФ **47**, 1919 (1964).
22. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, Москва (1980).
23. U. Frishe, Z. S. She, and P. L. Sulem, Physica D **28**, 382 (1987).
24. M. Kopp, A. Tur, and V. Yanovsky, Open J. Fluid Dynam. **5**, 128 (2015).
25. Л. Т. Матвеев, *Курс общей метеорологии. Физика атмосферы*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1984).
26. Н. И. Толмачева, Географический вестник, Метеорология **2**(33), 46 (2015).
27. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур и др., ДАН СССР **273**, 549 (1983).
28. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур и др., ДАН СССР **273**, 549 (1983).
29. М. А. Герман, *Спутниковая метеорология. Основы космических методов исследования в метеорологии*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1975).