

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ НА СПЕКТРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. Г. Антипов*, С. В. Уварова**

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 14 декабря 2022 г.,
после переработки 4 марта 2024 г.
Принята к публикации 14 марта 2024 г.

Спектры поляризации двухуровневой системы в полихроматическом поле получены в двух случаях — с использованием приближения вращающейся волны и без использования указанного приближения. Полученные спектры сравнивались по двум показателям — по усредненному отклонению по всему частотному диапазону и по отклонению на частоте перехода. Оба показателя позволяют дать количественную оценку искажения спектров поляризации, которые вносит использование приближения вращающейся волны. Получены зависимости указанных выше показателей от ключевых параметров модели — от центральной частоты, от отстройки, от ширины спектра воздействующего полихроматического поля. Полученные зависимости позволяют оценить границы применимости приближения вращающейся волны при заданном уровне допустимых искажений в спектре поляризации.

DOI: 10.31857/S0044451024110014

1. ВВЕДЕНИЕ

Приближение вращающейся волны (rotating wave approximation, RWA) — способ упрощения систем дифференциальных уравнений, описывающих физическую модель, применяемый в квантовой оптике и в области квантовых магнитных явлений. В системе уравнений отбрасываются компоненты, содержащие высокочастотные операторы, и при решении системы принимаются во внимание лишь низкочастотные, медленно протекающие во времени процессы. Как правило, возможность разделения существующих в модели процессов на высокочастотные и низкочастотные связано с наличием близких друг к другу частот, таких, например, как частота перехода между энергетическими уровнями атома и частота воздействующего поля в квантовой оптике. Разность этих близких частот дает низкочастотную составляющую, а их сумма — высокочастотную.

Первым примером успешного использования приближения вращающейся волны считается [1, 2] работа Блоха и Зигерта [3], в которой рассматривается уравнение Шредингера для частицы со спином $1/2$ в переменном магнитном поле с сильным перпендикулярным постоянным подмагничиванием. В качестве близких частот в этой модели выступают ларморова частота подмагничивающего поля и частота воздействующего переменного поля. При их совпадении наблюдается магнитный резонанс, когда вероятность перехода между состояниями с разными проекциями спина на направление подмагничивающего поля существенно возрастает. В работе [3] разность двух частот действительно полагается малой по сравнению с самими частотами, однако помимо этого предела при выводе приближенного решения уравнения Шредингера используются еще два важных допущения — малость отклонения поляризации воздействующего поля от круговой и малость амплитуды воздействующего поля по сравнению с величиной подмагничивающего поля. В определенном смысле работу [3] можно рассматривать не только как пример успешного

* E-mail: a.antipov@phys.spbu.ru

** E-mail: usvik2015@gmail.com

применения приближения вращающейся волны, но и как первую попытку обойти его, поскольку при выводе поправки к значению резонансной частоты, названной впоследствии сдвигом Блоха – Зигерта, учитываются малые величины, обратно пропорциональные частоте воздействующего поля.

Авторы работы [3] ни в ней, ни в последующих своих работах не применяют термин «приближение вращающейся волны» для обозначения использованного способа поиска приближенного решения рассматриваемого уравнения. Однако корни происхождения термина можно усмотреть именно в [3]: если воздействующее поле имеет круговую поляризацию, т. е. вращается в плоскости, перпендикулярной направлению подмагничивающего поля, уравнение Шредингера допускает точное аналитическое решение, полученное ранее Раби [4]. Если же имеет место отклонение от круговой поляризации, то точное решение оказывается невозможным и, чтобы найти приближенное решение, приходится прибегать к дополнительным допущениям, в частности — малости отклонения частоты воздействующего поля от ларморовой частоты подмагничивающего поля. Таким образом, решение Раби есть решение нулевого порядка в приближении вращающейся волны в задаче, рассмотренной в [3], в то время как Блох и Зигерт исследовали поправки уже первого порядка в указанном приближении. Раби в [4], разумеется, никакого приближения вращающейся волны не рассматривал, поскольку изначально решал более узкую задачу с круговой поляризацией воздействующего поля.

В дальнейшем, помимо области квантовых магнитных явлений, приближение вращающейся волны стало применяться и в квантовой оптике. Возможность подобного методологического переноса обусловлена идентичностью уравнений, математически описывающих, казалось бы, совершенно разные физические процессы (см. [5], разд. III.6). В квантовой оптике в качестве близких частот стали выступать частота воздействующего электромагнитного излучения и частота перехода между энергетическими уровнями атома. Однако долгое время единого мнения, как называть столь часто применяемое приближение, не было. Некоторые исследователи использовали термин «резонансное приближение» (*resonant approximation*) [6]. Другие обозначали подход как приближение вращающегося поля, что выглядит вполне оправданным, если речь идет о квантовых магнитных явлениях (иногда словосочетание «приближение вращающегося поля» встречается и в современных статьях [7, 8], но в дан-

ных случаях можно уже говорить, по-видимому, о терминологической ошибке). Зачастую исследователи вообще никак не обозначали используемое приближение, ограничиваясь математической формулировкой предела малой разности частот [9]. Одним из первых пропагандистов термина в современном виде можно признать Лэмба, который еще в 1957 г. использовал термин «приближение вращающейся волны» в своей статье [10], посвященной микроволновой спектроскопии атома гелия. Постепенно, особенно после публикации «Теории оптических мазеров» Лэмба [11] и справочника Хакена [5], термин «приближение вращающейся волны» стал вытеснять все остальные варианты и в 70-е годы стал общепринятым.

В настоящее время приближение вращающейся волны активно применяется при расчетах моделей в квантовой оптике и в области квантовых магнитных явлений. Например, при работе с такими моделями нанофотоники [12], как квантовые точки [13, 14] и квантовые провода [15]; при описании процессов, протекающих в оптоэлектронных устройствах [16]; при изучении переходов в ридберговских атомах во внешних полях [18] и др. Однако в подавляющем большинстве работ не приводится количественных оценок, насколько повлияло использование приближения вращающейся волны на конечный результат. Это вполне объяснимо, поскольку подразумевает выполнение расчетов без использования приближения вращающейся волны, что в большинстве ситуаций может быть весьма затруднительным из-за отсутствия точного аналитического решения и большого объема необходимых вычислений при реализации численных методов решения задачи.

В данной работе мы рассматриваем двухуровневую атомную систему в полихроматическом поле. Данная модель допускает аналитическое решение только в приближении вращающейся волны и при нулевой отстройке центральной частоты воздействующего поля от частоты перехода [17], в остальных случаях доступно только численное решение. Особенностью этой модели является то, что спектральный диапазон воздействующего поля может быть весьма широк и значительное влияние на границы применимости приближения вращающейся волны оказывает не только величина отстройки центральной частоты воздействующего поля от частоты перехода, но и количество гармоник полихроматического поля.

Мы оцениваем возмущение в спектрах поляризации, возникающее при использовании приближения вращающейся волны, по двум показателям —

по отклонению спектральной амплитуды, усредненному по всему частотному диапазону, и по отклонению спектральной амплитуды на частоте перехода. Получены зависимости обоих показателей от ключевых параметров модели, таких как центральная частота действующего поля, отстройка, количество полихроматических компонент. Данные зависимости позволяют установить, при заданной допустимой величине отклонения, применимо ли использование приближения вращающейся волны или нет для конкретного набора параметров модели. За счет экстраполяции определенные выводы можно сделать и для тех наборов параметров, при которых вычисления непосредственно не проводились. Полагаем, что предложенная методика оценки влияния приближения вращающейся волны может быть использована и для других моделей квантовой оптики.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 рассматривается уравнение матрицы плотности применительно к многоуровневой атомной системе в полихроматическом поле, а также упрощенный вариант уравнения, возникающий в приближении вращающейся волны. В разд. 3 изложены детали проведенных численных расчетов исходного и упрощенного уравнений и вводятся критерии сравнения спектров поляризации, получаемых при решении уравнений. Результаты расчетов, в частности, зависимости величин искажений спектров, возникающих из-за использования приближения вращающейся волны, от ключевых параметров модели, обсуждаются в разд. 4. Выводы представлены в разд. 5.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ В СЛУЧАЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим уравнение матрицы плотности, описывающее двухуровневую систему — неподвижный атом в полихроматическом поле в дипольном приближении:

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho] - i\hbar\Gamma \cdot \rho + i\hbar L, \quad (1)$$

где гамильтониан взаимодействия

$$H = E + V = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

содержит зависящие от времени недиагональные элементы

$$V_{12} = \hbar \tilde{V}_{12} e^{i\omega_{12}t} + \hbar \tilde{V}_{12}^* e^{-i\omega_{12}t},$$

$$\tilde{V}_{12}(t) = \frac{\Omega_{120}}{2} + \sum_{m=1}^{M_{12}} \Omega_{12m} \cos(m\Delta_{12}t), \quad (2)$$

матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

— соответственно матрицы релаксации и накачки, а символ « \cdot » отвечает поэлементному перемножению матриц. В (2) Δ_{12} обозначает спектральный интервал между компонентами полихроматического поля на переходе между уровнями с индексами 1 и 2; M_{12} определяет количество спектральных компонент поля; Ω_{12m} , $m = 0, 1, \dots, M_{12}$ — их амплитуды.

Выполним преобразование, смещающее спектр недиагональных элементов матрицы плотности на частоту, определяемую разностью соответствующих энергетических уровней:

$$\rho = \tilde{\rho} \cdot e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где матрица преобразования имеет вид

$$e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega_{12}t} \\ e^{i\omega_{21}t} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}.$$

После подстановки (3) в (1) и поэлементного домножения обеих частей равенства на $e^{-i\omega t}$ с учетом значения коммутатора диагональной матрицы E с матрицей плотности,

$$[E, \rho] = -\hbar\omega \cdot \rho,$$

и равенства

$$L \cdot e^{-i\omega t} = L$$

приходим к следующему уравнению:

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = [V, \tilde{\rho} \cdot e^{i\omega t}] \cdot e^{-i\omega t} - i\hbar\Gamma \cdot \tilde{\rho} + i\hbar L.$$

Поскольку элементы матрицы ω определяются разностью энергетических уровней, для любых трех индексов $1 \leq j, k, l \leq 2$ имеем

$$\omega_{jk} + \omega_{kl} + \omega_{lj} = 0.$$

Это позволяет занести экспоненту под знак коммутатора:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [V \cdot e^{-i\omega t}, \tilde{\rho}] - \Gamma \cdot \tilde{\rho} + L,$$

и, подставляя (2), получаем

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -i [\tilde{V} \cdot e^{i(w-\omega)t}, \tilde{\rho}] - i [\tilde{V}^* \cdot e^{-i(w+\omega)t}, \tilde{\rho}] - \Gamma \cdot \tilde{\rho} + L. \quad (4)$$

В получившемся выражении имеются два коммутатора с разными частотными характеристиками. В первом коммутаторе присутствует медленно изменяющийся с течением времени оператор — характерные частоты определяются разностями частот возмущающего поля w и частот переходов ω . Во втором коммутаторе, напротив, имеется быстро осциллирующий оператор, характерные частоты последнего задаются суммой частот w и ω .

Приближение вращающейся волны заключается в отбрасывании второго, высокочастотного коммутатора в уравнении для матрицы плотности (4), в результате чего получившееся упрощенное уравнение описывает исключительно низкочастотные, медленно зависящие от времени процессы.

В качестве обоснования такого упрощения можно привести следующие соображения. Рассмотрим предел $w + \omega \rightarrow \infty$ такой, что

$$|w - \omega| \ll w + \omega, \quad (5)$$

$$M \cdot \Delta \ll w + \omega, \quad (6)$$

где матрицы M , Δ , характеризующие полихроматическое поле, для двухуровневой системы имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{12} \\ -\Delta_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричные неравенства (5), (6) подразумевают, что любой недиагональный элемент матрицы из левой части по модулю много меньше любого недиагонального элемента матрицы в правой части. Для матриц размера 2×2 все сводится к соотношениям между единственными недиагональными элементами

$$|w_{12} - \omega_{12}| \ll w_{12} + \omega_{12}, \\ M_{12}\Delta_{12} \ll w_{12} + \omega_{12}.$$

Требование (5) является универсальным и применимо, в том числе для монохроматического поля; требование (6) — специфично для полихроматического поля. В рассматриваемом пределе решение уравнения (4) можно представить в виде суммы компонент,

каждая из которых относится к одному из непересекающихся спектральных доменов с центрами на частотах

$$(w_{12} + \omega_{12})s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7)$$

причем взаимодействие между компонентами соседних доменов осуществляется исключительно за счет второго, высокочастотного коммутатора. Действительно, остальные составляющие уравнения (4) при достаточно больших значениях $w + \omega$ выполняют отображение лишь внутри отдельных спектральных доменов: домножение на $e^{i(w-\omega)t}$ не меняет существенно спектр $\tilde{\rho}$ в силу (5), домножение на \tilde{V} — в силу (6), дифференцирование не порождает новых спектральных компонент, Γ и L вообще не зависят от времени.

Рассмотрим асимптотическое разложение решения уравнения (4) в пределе $w + \omega \rightarrow \infty$:

$$\tilde{\rho} = \rho^{(RWA)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \dots, \quad (8)$$

где $\rho^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots$ — слагаемые различной степени малости в рассмотренном пределе,

$$\rho^{(l)} \propto (w + \omega)^{-l}$$

или, для отдельных элементов матриц,

$$\rho_{jk}^{(l)} \propto ||w + \omega||^{-l} \propto (w_{12} + \omega_{12})^{-l}, \quad 1 \leq j, k \leq 2.$$

Можно утверждать, что первое слагаемое в асимптотическом разложении (8), не исчезающее при $w + \omega \rightarrow \infty$ и обозначенное $\rho^{(RWA)}$, относится исключительно к наиболее низкочастотному спектральному домену (с индексом $s = 0$), иначе говоря, его спектр обладает только частотами внутри диапазона

$$-(w_{12} + \omega_{12})/2 \dots + (w_{12} + \omega_{12})/2.$$

Действительно, если бы это было не так, то, с учетом наличия дифференцирования по времени в (4), при рассмотрении любого иного спектрального домена мы бы получили бесконечно растущую при $w + \omega \rightarrow \infty$ левую часть, которую невозможно скомпенсировать вполне конечной правой частью.

Уравнение, определяющее функцию $\rho^{(RWA)}$, есть уравнение (4), рассмотренное замкнуто в низкочастотной области — спектральном домене с индексом $s = 0$. Это означает, что из уравнения (4) изъят высокочастотный коммутатор, поскольку он переводит $\rho^{(RWA)}$ в соседние спектральные домены с индексами $s = \pm 1$, где результату действия высокочастотного коммутатора на $\rho^{(RWA)}$ приравнивается произ-

водная по времени от $\rho^{(1)}$ в соответствующем домене — величина того же порядка малости по $w + \omega$ (нулевого), что и $\rho^{(RWA)}$:

$$\frac{d\rho_{s=\pm 1}^{(1)}}{dt} = -i \left[\tilde{V}^* \cdot e^{-i(w+\omega)t}, \rho^{(RWA)} \right]. \quad (9)$$

Таким образом, в уравнении, определяющем $\rho^{(RWA)}$, полностью исчезает зависимость от суммы частоты перехода ω и центральной частоты воздействующего поля w и остается зависимость лишь от их разности. Вводя отстройку

$$\delta = w - \omega = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} - \omega_{12} \\ \omega_{12} - w_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

получаем окончательно уравнение для матрицы плотности в приближении вращающейся волны:

$$\frac{d\rho^{(RWA)}}{dt} = -i \left[\tilde{V} \cdot e^{i\delta t}, \rho^{(RWA)} \right] - \Gamma \cdot \rho^{(RWA)} + L. \quad (10)$$

По сравнению с исходным уравнением (4) уравнение (10) оказывается существенно проще, позволяя в ряде случаев представить решение в аналитическом виде [17]. С точки зрения выполнения численных расчетов, уравнение (10) также является более предпочтительным, нежели (4). При численном расчете величина шага по времени определяется максимальной частотой, с которой флуктуируют элементы матрицы плотности. Поэтому при работе с уравнением (10), описывающим низкочастотные процессы, можно взять шаг по времени меньше по сравнению с тем шагом по времени, который требуется использовать при численном решении уравнения (4). В случаях, когда отношения максимальных частот и, следовательно, шагов по времени велики, объем необходимых вычислений может различаться на порядки. Именно поэтому приближение вращающейся волны столь популярно при численном решении уравнений матрицы плотности.

Выполнив замену

$$\rho^{(RWA)} = \tilde{\rho}^{(RWA)} \cdot e^{i\delta t},$$

можно сместить нулевую частоту спектра на частоту отстройки, тем самым заменив осциллирующий сомножитель в коммутаторе на чисто мнимую добавку к матрице релаксации

$$\frac{d\tilde{\rho}^{(RWA)}}{dt} = -i \left[\tilde{V}, \tilde{\rho}^{(RWA)} \right] - (\Gamma + i\delta) \cdot \tilde{\rho}^{(RWA)} + L.$$

3. ПРОВЕДЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Мы изучали влияние, которое оказывает приближение вращающейся волны на спектры

поляризации

$$P_j = -\frac{1}{2} \langle \rho_{12} e^{ij\Delta_{12}t} \rangle_t,$$

двухуровневой системы, определяющие дисперсию и поглощение среды. Для этого численно решалось уравнение (4) для матрицы плотности и полученные спектры недиагональных элементов матрицы плотности сравнивались с аналогичными спектрами, полученными в результате решения уравнения (10) для матрицы плотности в приближении вращающейся волны.

Для численного решения уравнений для матрицы плотности использовался метод Рунге–Кутты второго порядка. Задавалось начальное значение матрицы плотности

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

после чего рекуррентно строилась последовательность матриц $\rho_k = \rho(k\Delta t)$, $k = 1, 2, \dots$, отражающая дискретную эволюцию матрицы плотности по времени с шагом Δt :

$$\rho_k = \rho_{k-1} + \frac{\Delta t}{2} [f((k-1)\Delta t, \rho_{k-1}) + f(k\Delta t, \rho_{k-1} + \Delta t f((k-1)\Delta t, \rho_{k-1}))], \quad (11)$$

где матрица

$$f(t, \rho) = -i \left[\tilde{V} \cdot e^{i\delta t}, \rho \right] - i \left[\tilde{V}^* \cdot e^{-i(2\omega+\delta)t}, \rho \right] - \Gamma \cdot \rho + L$$

использовалась при решении точного уравнения, а матрица

$$f(t, \rho) = -i \left[\tilde{V} \cdot e^{i\delta t}, \rho \right] - \Gamma \cdot \rho + L$$

— при решении уравнения в приближении вращающейся волны. В качестве не зависящих от времени матриц релаксации и накачки на уровни были взяты матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для двухуровневой системы в матрицах M , Δ , Γ , w , ω , δ имеется всего один недиагональный элемент (M_{12} , Δ_{12} , \dots). При дальнейшем изложении нижние индексы у этих величин будут опускаться.

Величина шага по времени Δt выбиралась так, чтобы на период максимальной частоты спектрального домена (7) с индексом $s = 1$, т. е. $(4\pi/3)/(w+\omega)$, приходилось 50 шагов. При использовании приближения вращающейся волны в большинстве ситуаций такая величина шага является избыточной, однако, чтобы процедура расчета была максимально одинаковой в обоих случаях, величина $\Delta t = (4\pi/150)/(w+\omega)$ бралась при расчете как

по точной формуле, так и в приближении вращающейся волны. Количество шагов, которое необходимо выполнить при расчете, определяется длительностью переходных процессов, приводящих, в конечном итоге, к тому, что элементы матрицы плотности оказываются периодическими функциями с периодом, равным периоду $2\pi/\Delta$ частоты межкомпонентного сдвига полихроматического поля. Частота Δ межкомпонентного сдвига оказывается минимальной базовой частотой процессов, установившихся в системе. Длительность переходных процессов, выраженная в периодах базовой частоты, задается отношением Δ к усредненной величине элементов матрицы релаксации Γ , и при рассматриваемых параметрах достаточно было вычислить несколько периодов базовой частоты, чтобы устранить влияние переходных процессов на результаты расчетов. С учетом выбранной величины шага по времени Δt , количество необходимых шагов составляло порядка 10^5 – 10^6 .

После получения двух последовательностей матриц (11) из них выбирались матрицы, соответствующие последнему периоду $2\pi/\Delta$ базовой частоты полихроматического поля, и дискретным преобразованием Фурье вычислялись спектры недиагональных элементов ρ_{12} на частотах $0, \pm\Delta, \pm2\Delta, \dots$. В полученных спектрах, с точностью до коэффициента представляющих собой спектры поляризации двухуровневой системы, рассматривались отдельно вещественные и мнимые составляющие.

Искажения спектров, возникающие при использовании приближения вращающейся волны, количественно оценивались по двум характеристикам. Во-первых, вычислялось квадратичное отклонение по всему спектру поляризации, нормированное на полную энергию точного спектра,

$$d_{avg} = \sqrt{\frac{\sum_j (P_j^{(RWA)} - P_j)^2}{\sum_j P_j^2}}, \quad (12)$$

причем указанное отклонение можно отдельно рассчитывать как для вещественной части спектра поляризации, так и для мнимой. Отклонение d_{avg} , рассчитанное по формуле (12) для вещественной части спектра поляризации, дает количественную оценку усредненного по всему набору частот искажения спектра дисперсии, вызванного использованием приближения вращающейся волны, а рассчитанное для мнимой части спектра — аналогичную оценку усредненного искажения спектра поглощения.

Во-вторых, в ряде ситуаций для оценки искажений спектра поляризации также целесообразно использовать отклонение спектра на частоте перехода ($j = 0$):

$$d_{peak} = \left| \frac{P_0^{(RWA)} - P_0}{P_0} \right|. \quad (13)$$

Зачастую именно на частоте перехода в мнимой части спектра поляризации наблюдается выраженный пик, что дает возможность оценить влияние приближения вращающейся волны в этой части спектра поглощения. Для вещественной части спектра поляризации оценка по формуле (13), как правило, является мало полезной, поскольку значение дисперсии на частоте перехода оказывается близким к нулю. Так, при нулевой отстройке вещественная часть спектра поляризации в приближении вращающейся волны равна нулю на частоте перехода, а при использовании точной формулы (4) имеет малое, но отличное от нуля значение. Следовательно, оценка вещественной части спектра, выполненная по формуле (13), дает ровно единицу, что не отражает адекватно сложившуюся ситуацию.

Очевидно, что величина возмущений спектров, возникающих при использовании приближения, зависит от ряда параметров, таких как частота перехода, величина отстройки, ширина спектра полихроматического поля. Рассчитанные и представленные далее зависимости позволяют оценить корректность применения приближения вращающейся волны в том или ином случае.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 1 показаны спектры поляризации, полученные в приближении вращающейся волны и без использования указанного приближения, для двухуровневой системы, находящейся под воздействием полихроматического поля, состоящего из 101 компоненты с одинаковыми амплитудами ($M = 50, \Omega = 0.2\Gamma$). Данный случай в приближении вращающейся волны был рассмотрен в работах [19,20] и выделяется наличием излучения на частоте перехода (отрицательный импульс в спектре $\text{Im } P$ при $j = 0$).

Обращают на себя внимание два явных отличия спектров в приближении вращающейся волны (показанных пунктиром) от точных спектров. Во-первых, спектр в приближении вращающейся волны обладает определенной четностью относительно частоты перехода $j \rightarrow -j$, точный спектр такой четности не демонстрирует. Это связано с тем, что у двухуровневой системы при нулевой отстрой-

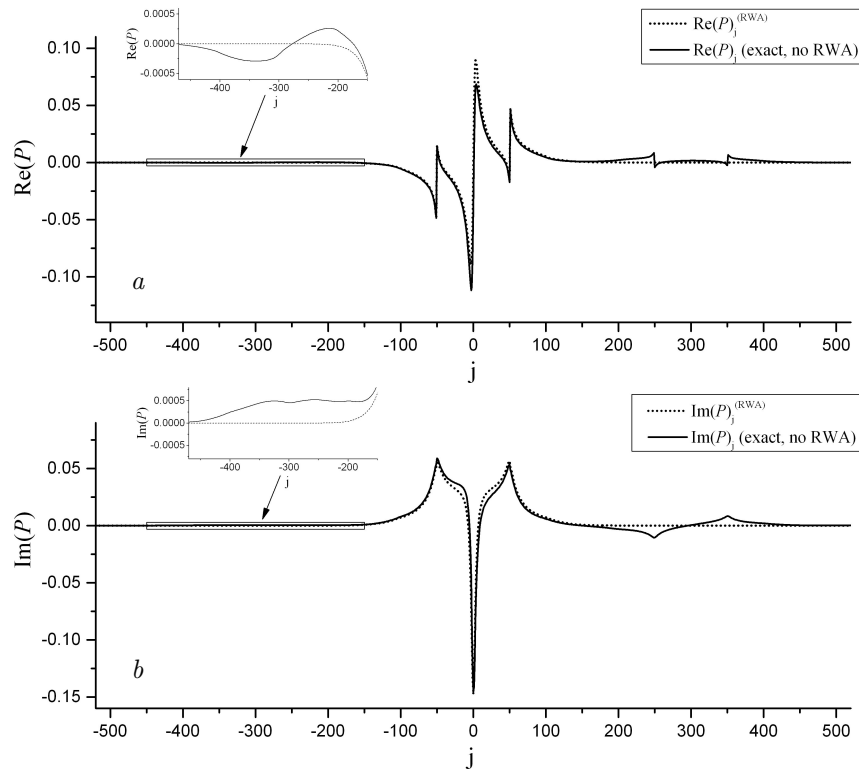


Рис. 1. Спектры поляризации, полученные с использованием приближения вращающейся волны и без использования указанного приближения: *a* — вещественная часть поляризации; *b* — мнимая часть поляризации. $M = 50$, $\Omega = 0.2\Gamma$, $\Delta = 0.3\Gamma$, $\delta = 0$, $w = 150\Delta$

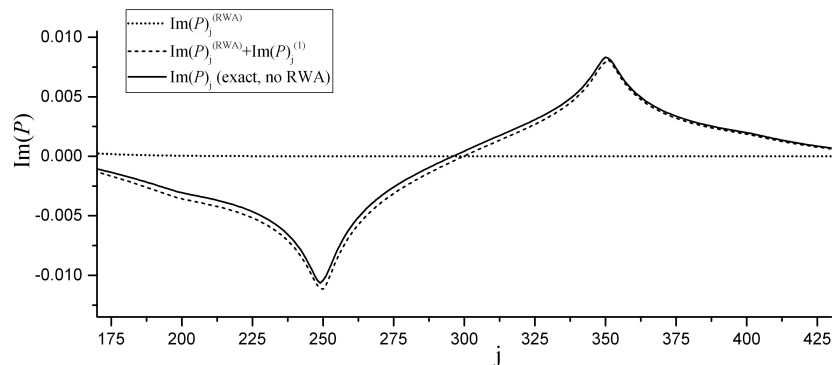


Рис. 2. Спектр поглощения в высокочастотной области спектра. $M = 50$, $\Omega = 0.2\Gamma$, $\Delta = 0.3\Gamma$, $\delta = 0$, $w = 150\Delta$

ке в приближении вращающейся волны отсутствует вещественная часть недиагональных элементов матрицы плотности [17]. В результате спектр поляризации характеризуется некоторой четностью — вещественная часть оказывается нечетной, а мнимая часть — четной. Если не использовать приближение вращающейся волны, то вещественная часть недиагональных элементов оказывается ненулевой и четность спектра нарушается. Во-вторых, в спектрах поляризации, рассчитанных в приближении вращающейся волны, полностью отсутствуют возмущения вблизи удвоенной частоты перехода

($j \approx (w + \omega) / \Delta = 2w / \Delta$), т. е. в спектральном домене с индексом $s = 1$ (см. (7)). Последнее неудивительно, поскольку, как отмечалось ранее, в решении $\rho^{(RWA)}$ уравнения (10) существенную роль играют лишь низкочастотные компоненты в спектральном домене с индексом $s = 0$. На рис. 2 подробнее показана высокочастотная спектральная область $s = 1$. Чтобы добиться лучшего приближения к точному решению в этой спектральной области требуется рассматривать следующую за $\rho^{(RWA)}$ поправку в асимптотическом разложении (8), вычисленную по формуле (9) и показанную на рис. 2 штриховой линией.

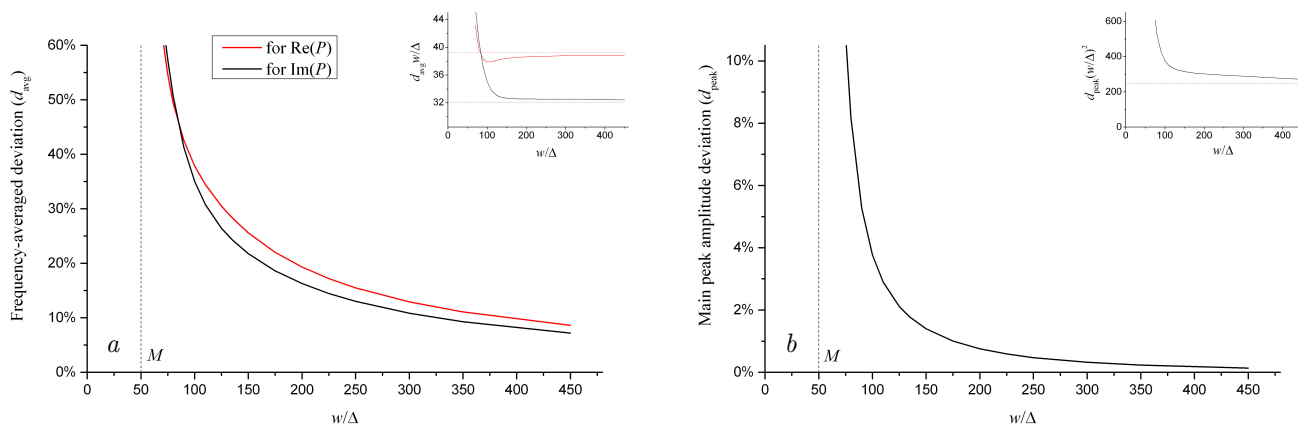


Рис. 3. (В цвете онлайн) Величина искажений спектров поляризации, возникающих при использовании приближения вращающейся волны, в зависимости от центральной частоты воздействующего поля w : a — усредненное по спектру искажение (d_{avg}) для обеих частей поляризации; b — искажение амплитуды импульса на частоте перехода (d_{peak}) спектра мнимой части поляризации. $M = 50$, $\Omega = 0.2\Gamma$, $\Delta = 0.3\Gamma$, $\delta = 0$

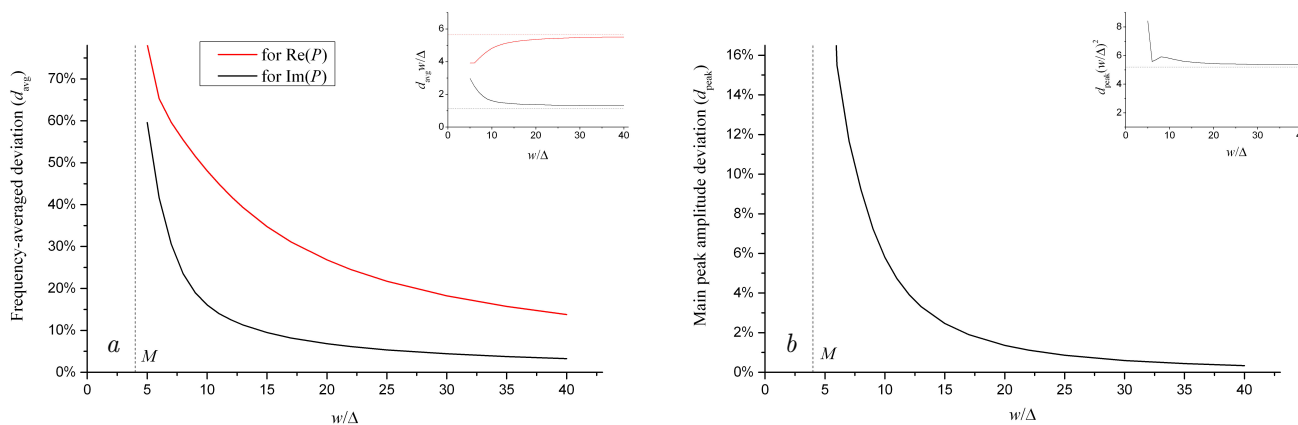


Рис. 4. (В цвете онлайн) То же, что на рис. 3, но для 9-компонентного полихроматического поля ($M = 4$)

Несколько менее явное различие спектров на рис. 1 заключается в искажениях вблизи частоты перехода ($j \approx 0$), в низкочастотном спектральном домене (7) с индексом $s = 0$. Амплитуда отрицательного пика спектра мнимой части поляризации на частоте перехода в приближении вращающейся волны оказывается приблизительно на 1.4% больше, нежели подсчитанная по точной формуле (4). Кроме того, более точные расчеты показывают смещение пика вправо, в то время как приближение вращающейся волны предсказывает излучение именно на частоте перехода $j = 0$. Амплитуда и форма боковых положительных импульсов в спектре мнимой части поляризации также разнятся. Аналогичные искажения наблюдаются и в спектре вещественной части поляризации.

Куда менее очевидное различие спектров обнаруживается вблизи отрицательной удвоенной частоты перехода ($j \approx -(w + \omega)/\Delta = -2w/\Delta$). На вставках на рис. 1 a, b в увеличенном вертикальном масштабе

показаны спектры поляризации в спектральном домене с индексом $s = -1$. Подсчитанные по точной формуле спектры имеют отличные от нуля компоненты в этой области частот, хотя, конечно, величина возмущений почти на 2 порядка меньше той, что наблюдается в спектральном домене $s = 1$ при $2w/\Delta - M \lesssim j \lesssim 2w/\Delta + M$. Дисперсия возмущения на отрицательных частотах выше и затрагивает более широкую часть спектра. Кроме того, центр возмущения несколько смещен в сторону положительных значений частот, также как и спектр вблизи частоты перехода. Что касается спектра, полученного в приближении вращающейся волны, то на нем какие-либо возмущения при $j \approx -2w/\Delta$ практически полностью отсутствуют.

При увеличении частоты воздействующего поля (и частоты перехода при нулевой отстройке) возмущение при $j \approx 2w/\Delta$, наблюдаемое на рис. 1 a, b , смещается вправо, его величина уменьшается. Отклонения в спектрах в низкочастотном домене $s = 0$ вбли-

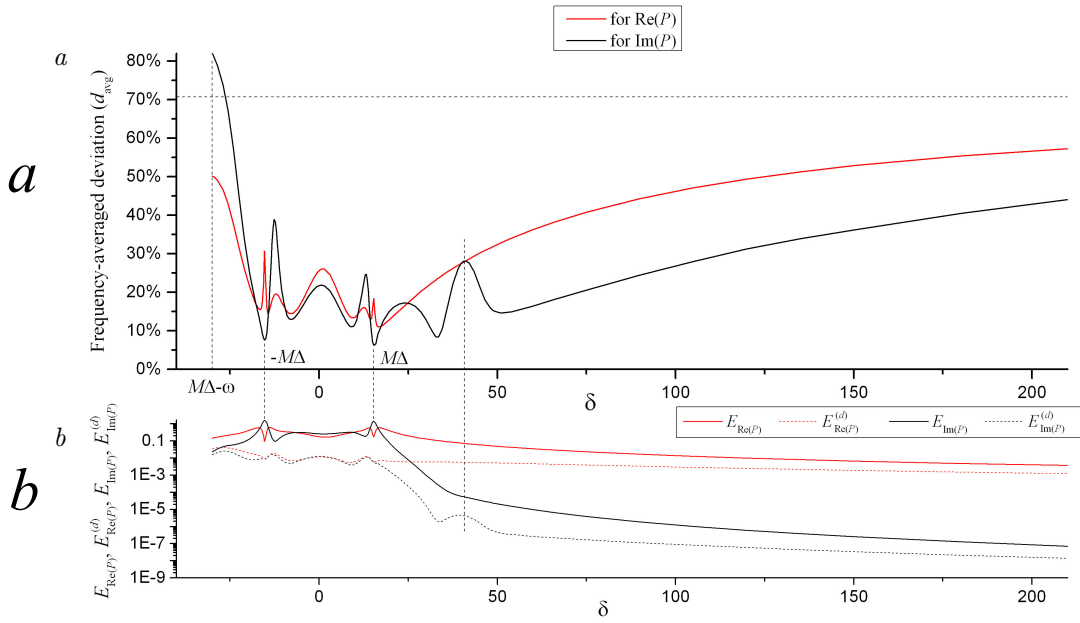


Рис. 5. (В цвете онлайн) Величина искажений спектров поляризации, возникающих при использовании приближения вращающейся волны, в зависимости от отстройки δ : a — относительное искажение d_{avg} ; b — энергии спектров поляризации $E_{\text{Re } P}$, $E_{\text{Im } P}$ без использования приближения и абсолютные величины искажений $E_{\text{Re } P}^{(d)}$, $E_{\text{Im } P}^{(d)}$. $M = 50$, $\Omega = 0.2\Gamma$, $\Delta = 0.3\Gamma$, $w = 150\Delta$

зи частоты перехода $j \approx 0$ также становятся меньше. Все это проявляется в монотонном уменьшении усредненного отклонения спектров d_{avg} , которое демонстрирует рис. 3a. Величина d_{avg} при больших частотах действующего поля оказывается обратно пропорциональной w (см. вставку на рис. 3a). Подобные зависимости наблюдаются для спектров как вещественной, так и мнимой частей поляризации.

При уменьшении частоты действующего поля величина искажений спектра при использовании приближения вращающейся волны возрастает. При приближении к частотам $w/\Delta \sim M$ условие (6) нарушается, величина искажений резко увеличивается, делая приближение вращающейся волны абсолютно непригодным для расчета спектров поляризации. Края областей спектров полихроматического поля $-M \lesssim j \lesssim M$ и $2w/\Delta - M \lesssim j \lesssim 2w/\Delta + M$ начинают перекрываться, в результате чего в спектрах дисперсии и поглощения происходят существенные изменения. Расчеты по точной формуле (4) вполне отражают указанные изменения, в то время как вычисления в приближении вращающейся волны — нет, поскольку вообще не описывают корректно спектры в частотном диапазоне $2w/\Delta - M \lesssim j \lesssim 2w/\Delta + M$. В итоге получается, что при малых w приближение вращающейся волны для полихроматического излучения оказывается неадекватным ситуации не при приближении к нулю, а уже при $w/\Delta \sim M$.

Искажение мнимой части поляризации на частоте перехода d_{peak} также стремится к нулю при больших частотах действующего поля (рис. 3b). Однако, как показывает вставка на рис. 3b, величина d_{peak} оказывается обратно пропорциональной не первой степени w , а ее квадрату. Более быстрое убывание погрешности приближения вращающейся волны по сравнению с наблюдаемым в среднем по спектру характерно исключительно для компоненты на частоте перехода ($j = 0$) и связано, по-видимому, с особой симметрией спектра, проявляющейся в пределе $w \rightarrow \infty$.

На рис. 4 показаны зависимости величин искажений спектров поляризации от w для случая девятикомпонентного ($M = 4$) полихроматического поля. Этот случай был рассмотрен в приближении вращающейся волны [17] и, в отличие от случая с $M = 50$, не имеет излучения на частоте перехода. Однако характер зависимостей d_{avg} , d_{peak} остается таким же, как и в случае более широкой спектральной полосы действующего поля. Искажение компоненты на частоте перехода (рис. 4b) убывает обратно пропорционально квадрату w , а искажение в среднем по спектру (рис. 4a) — обратно пропорционально первой степени w . Это указывает на фундаментальный характер зависимостей погрешности, вызываемой применением приближения вращающейся волны, в пределе больших частот действующих полей.

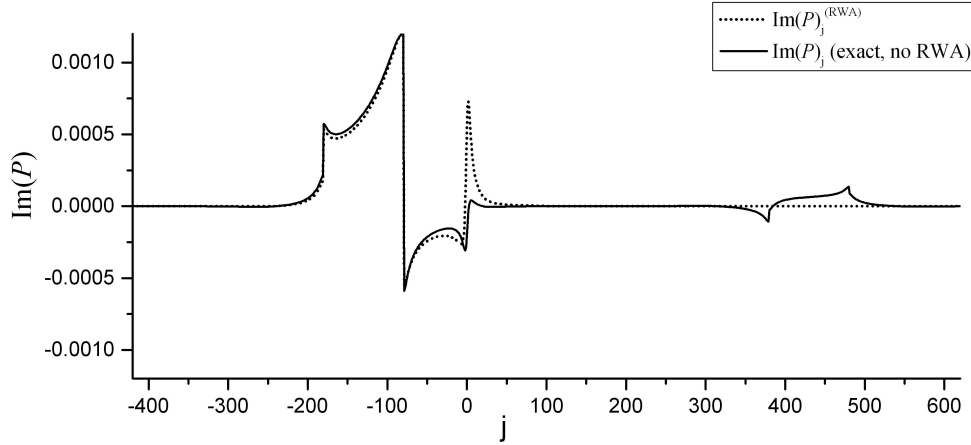


Рис. 6. Спектр мнимой части поляризации, полученный с использованием приближения вращающейся волны и без использования указанного приближения. $M = 50$, $\Omega = 0.2\Gamma$, $\Delta = 0.3\Gamma$, $\delta = 39$, $\omega = 150\Delta$. Максимальное отклонение наблюдается на частоте перехода ($j = 0$)

Особенностью зависимостей искажений спектров поляризации от отстройки δ (рис. 5), по сравнению с зависимостями от частоты воздействующего поля ω при нулевой отстройке, является то, что полная энергия спектров существенно зависит от изменяемого параметра. Когда величина отстройки δ достаточно велика и превышает половину ширины спектрального диапазона воздействующего полихроматического поля, т. е. частота перехода выходит за пределы указанного диапазона, полная энергия спектров поляризации, как вычисленная по точному уравнению (4), так и в приближении вращающейся волны (10), начинает уменьшаться экспоненциально. Это хорошо заметно на рис. 5b, где показаны полные энергии спектров поляризации

$$E_{\text{Re } P} = \sum_j (\text{Re } P_j)^2,$$

$$E_{\text{Im } P} = \sum_j (\text{Im } P_j)^2$$

и полные энергии отклонений спектров, возникающих при использовании приближения вращающейся волны,

$$E_{\text{Re } P}^{(d)} = \sum_j \left(\text{Re } P_j^{(RWA)} - \text{Re } P_j \right)^2,$$

$$E_{\text{Im } P}^{(d)} = \sum_j \left(\text{Im } P_j^{(RWA)} - \text{Im } P_j \right)^2,$$

в логарифмическом масштабе по вертикальной оси. При больших значениях отстройки скорость убывания полной энергии спектра поляризации замедляется — при $\delta \rightarrow \infty$ энергия вещественной части спектра уменьшается обратно пропорционально δ^2 , а энергия мнимой части — обратно пропорционально δ^4 . Если рассматривать достаточно широкий диапазон значений параметра δ , то энергия спектра по-

ляризации может отличаться на порядки. Таким образом, оказывается, что колебания относительной, усредненной по всему спектру величины искажений d_{avg} , наблюдаемые на рис. 5a, суть результат сочетания двух факторов. Во-первых, на d_{avg} влияют непосредственно отклонения, вызванные использованием приближения вращающейся волны, что учитывается в числителе выражения (12). Во-вторых, часть колебаний величины d_{avg} есть результат изменений полной энергии спектров поляризации, входящей в знаменатель выражения (12). Так, минимумы d_{avg} для спектра мнимой части поляризации, наблюдаемые при отстройках $\delta = \pm M\Delta$, суть последствия действия именно второго фактора — при этих значениях отстройки края спектрального диапазона приходятся на частоту перехода. Это вызывает резкое увеличение полной энергии спектра мнимой части поляризации, что, в конечном итоге, приводит к уменьшению относительной величины искажений. Максимум d_{avg} , обнаруживаемый при $\delta \approx 39 \pm 3$, напротив, есть результат действия первого фактора — при данных значениях отстройки возникает существенное отклонение спектра в приближении вращающейся волны от точного (см. рис. 6). Приближение вращающейся волны предсказывает здесь существование поглощения на частоте перехода, в то время как при использовании более точного уравнения (4) этого вывода сделать нельзя.

При больших значениях отстройки спектр поляризации распадается на две не взаимодействующих друг с другом частотных области:

$$-\frac{\delta}{\Delta} - M < j < -\frac{\delta}{\Delta} + M,$$

$$\frac{2\omega + \delta}{\Delta} - M < j < \frac{2\omega + \delta}{\Delta} + M.$$

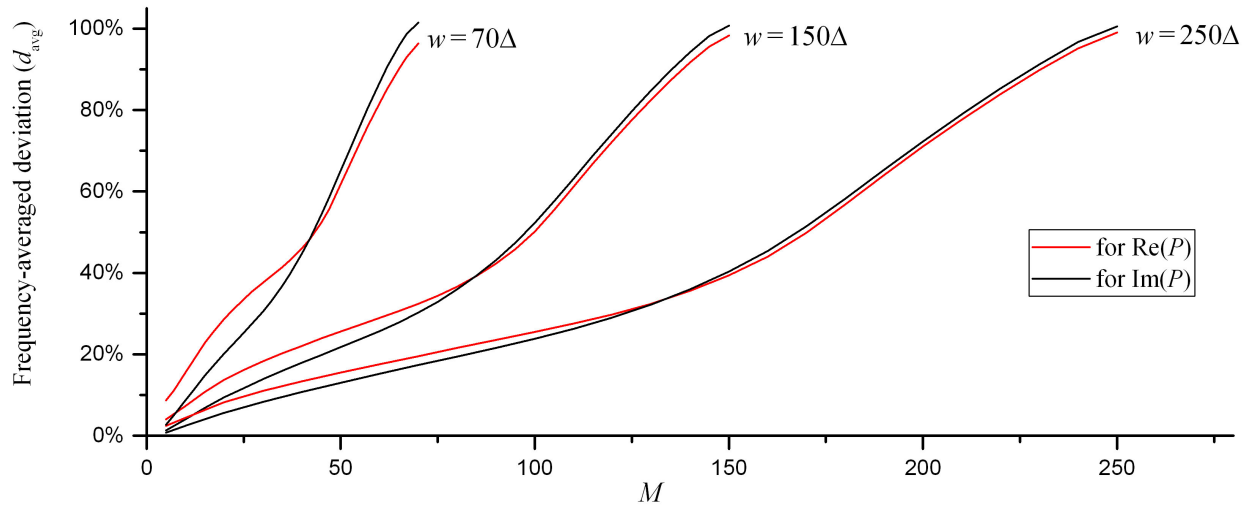


Рис. 7. (В цвете онлайн) Величина искажений спектров поляризации, возникающих при использовании приближения вращающейся волны, в зависимости от количества компонент полихроматического поля M при трех фиксированных значениях частоты воздействующего поля $w = 70\Delta, 150\Delta, 250\Delta$; $\Omega = 0.2\Gamma, \Delta = 0.3\Gamma, \delta = 0$

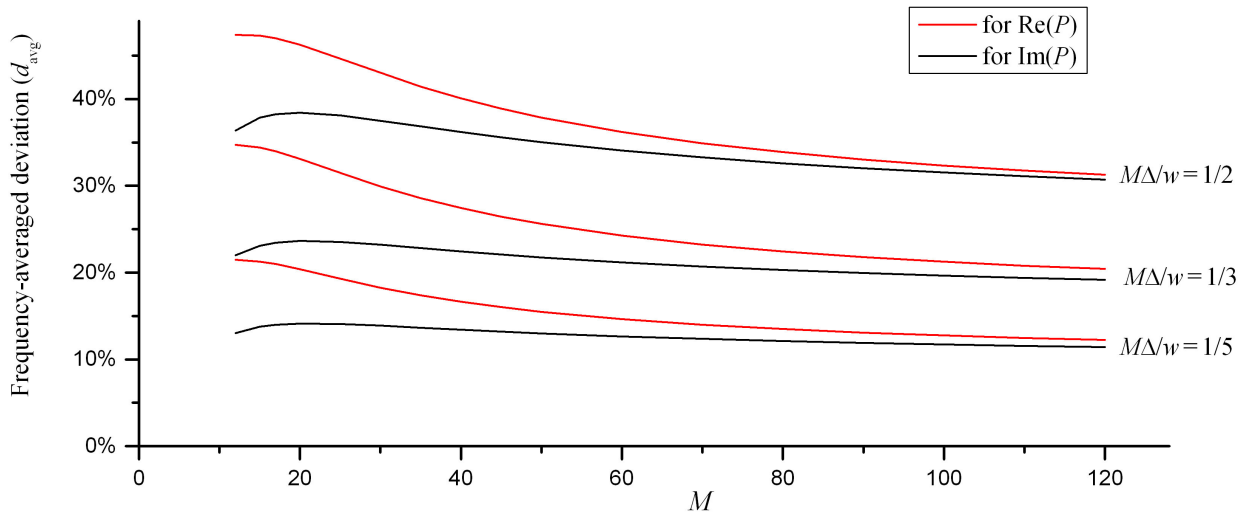


Рис. 8. (В цвете онлайн) Величина искажений спектров поляризации, возникающих при использовании приближения вращающейся волны, в зависимости от количества компонент полихроматического поля M . Частота воздействующего поля w здесь изменяется пропорционально M , тем самым фиксированной оказывается доля спектрального диапазона, перекрываемого полосой полихроматического поля (рассмотрены доли $1/5, 1/3, 1/2$); $\Omega = 0.2\Gamma, \Delta = 0.3\Gamma, \delta = 0$

Спектр в первой области с высокой степенью точности описывается приближением вращающейся волны, а спектр во второй, напротив, полностью отсутствует в данном приближении. Энергии спектров областей при $\delta \gg 2\omega$ практически равны, поэтому d_{avg} , как видно на рис. 5а, асимптотически стремится к $1/\sqrt{2} \approx 70.7\%$ при $\delta \rightarrow \infty$. Столь высокий уровень искажений в этом пределе связан с нарушением условия применимости приближения вращающейся волны (5). Такое поведение усредненного отклонения спектра при $\delta \rightarrow \infty$ характерно как для вещественной, так для мнимой части поляризации.

При отрицательных значениях отстройки при приближении к $M\Delta - \omega$ спектральные области начинают перекрываться, нарушается условие применимости приближения вращающейся волны (6), в результате указанное приближение становится совершенно неадекватным, выдавая спектры, сильно отличающиеся от подсчитанных исходя из точного уравнения (4).

На рис. 7 показаны зависимости относительных величин искажений спектров поляризации, возникающих при использовании приближения вращающейся волны, d_{avg} от количества компонент M

воздействующего полихроматического поля при нескольких значениях центральной частоты w . Центральная частота воздействующего поля w определяет расстояние между спектральными областями, а количество компонент M , при фиксированном значении расстояния между компонентами Δ , — ширину спектральных областей. С ростом M относительные величины искажений спектров поляризации монотонно возрастают, достигая при $M = w/\Delta$ значений, близких к 100 %. Последнее означает, что когда края спектральных областей начинают перекрываться, энергия отклонения спектров, вызванных использованием приближения вращающейся волны, оказывается близкой к энергии исходного, точного спектра. Очевидно, что условие (6) здесь нарушается, и приближение вращающейся волны в этом случае дает неудовлетворительные результаты.

Схожий вид зависимостей $d_{avg}(M)$ при различных значениях w с точностью до растяжения вдоль горизонтальной оси на рис. 7 указывает на то, что искажения спектров в приближении вращающейся волны определяются не количеством компонент в воздействующем полихроматическом поле как таковым, а долей в спектральном диапазоне между частотами $\omega - w$ и $\omega + w$, которую занимает спектр полихроматического поля. Это подтверждает рис. 8, где показаны графики зависимости $d_{avg}(M)$ не при фиксированных w , а при фиксированных отношениях $M\Delta/w$, т. е. при фиксированных долях спектрального диапазона, который занимает спектр полихроматического поля. Если w изменяется пропорционально M , вид спектров поляризации слабо меняется, также как и величины искажений спектров, вызванных использованием приближения вращающейся волны. Отметим, что при достаточно больших M и w величина $d_{avg}(M)$ стабилизируется на уровне, приблизительно равном двум третям от отношения $M\Delta/w$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы выполнили количественную оценку влияния, которое оказывает использование приближения вращающейся волны на спектры поляризации двухуровневой системы в полихроматическом поле. Вычислено усредненное по всему частотному диапазону отклонение спектров, вызываемое применением приближения вращающейся волны, от ряда параметров системы, а именно — от частоты воздействующего поля w , от величины отстройки δ и от количества компонент воздействующего поля M .

Величина усредненного отклонения спектров оказалась обратно пропорциональной частоте воз-

действующего поля, что подтверждает предположение о том, что первая поправка к матрице плотности в асимптотическом разложении в пределе $w+\omega \rightarrow \infty$ имеет порядок $(w + \omega)^{-1}$. Однако отклонение на частоте перехода продемонстрировало более быстрое убывание с увеличением частоты воздействующего поля, а именно — оказалась обратно пропорциональной квадрату частоты.

Зависимость усредненного отклонения спектров от отстройки центральной частоты полихроматического поля w от частоты перехода ω не имеет четких тенденций, когда величина отстройки мала относительно суммы частоты перехода и средней частоты воздействующего поля, и в значительной мере определяется полной энергией спектра поляризации. Локальный минимум отклонения спектров наблюдается, если частота перехода соответствует границе воздействующего полихроматического поля. При больших отстройках условие применимости приближения вращающейся волны нарушается и отклонения спектров асимптотически стремятся к $1/\sqrt{2}$.

Что касается влияния количества компонент воздействующего полихроматического поля на усредненное отклонение спектров, то оно проявляется опосредовано, через долю частотного диапазона, которую занимает полихроматическое поле в диапазоне частот от $\omega - w$ до $\omega + w$. С увеличением количества компонент при фиксированном расстоянии между ними доля увеличивается, что приводит к увеличению отклонений. Если же доля фиксирована, например, за счет роста центральной частоты воздействующего поля пропорционально количеству компонент, то величина отклонений стабилизируется на уровне, приблизительно равном $2/3$ от доли.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. S. Agarwal, Phys. Rev. A **4**, 1778 (1971).
2. D. F. Walls, Phys. Lett. A **42**, 217 (1972).
3. F. Bloch and A. Siegert, Phys. Rev. **57**, 522 (1940).
4. I. I. Rabi, Phys. Rev. **51**, 652 (1937).
5. H. Haken, *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin (1970), Vol. XXV/2C.
6. L. E. Estes, T. H. Keil, and L. M. Narducci, Phys. Rev. **175**, 286 (1968).
7. M. S. Conradi, S. A. Altobelli, S. J. Sowko et al., J. Magn. Res. **288**, 23 (2018).

8. E. Jericha, C. Gösselsberger, H. Abele et al., *Sci. Rep.* **10**, 5815 (2020).
9. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
10. W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev.* **105**, 559 (1957).
11. W. E. Lamb, Jr., in *Quantum Optics and Electronics*, Gordon and Breach, New York (1965), p. 329.
12. C. Tserkezis, A. I. Fernández-Domínguez, P. A. D. Gonçalves et al., *Rep. Prog. Phys.* **83**, 082401 (2020).
13. I. Maldonado, J. Villavicencio, L. D. Contreras-Pulido, E. Cota, and J. A. Maytorena, *Phys. Rev. B* **97**, 19531 (2018).
14. G. Rastelli and M. Governale, *Phys. Rev. B* **100**, 085435 (2019).
15. S. Huber, M. Buchhold, J. Schmiedmayer, and S. Diehl, *Phys. Rev. A* **97**, 043611 (2018).
16. C. Jirauschek, M. Riesch, and P. Tzenov, *Adv. Theory Simul.* **2**, 1900018 (2019).
17. А. Г. Антипов, С. А. Пулькин, А. С. Сумароков и др., *Опт. и спектр.* **118**, 977 (2015) [A. G. Antipov, S. A. Pulkin, A. S. Sumarokov et al., *Opt. Spectr.* **118**, 945 (2015)].
18. T. Armon and L. Friedland, *Phys. Rev. A* **102**, 052817 (2020).
19. A. G. Antipov, A. A. Kalinichev, S. A. Pulkin et al., *J. Phys.: Conf. Ser.* **735**, 012029 (2016).
20. А. Г. Антипов, Н. И. Матвеева, С. А. Пулькин, С. В. Уварова, *Опт. и спектр.* **121**, 947 (2016) [A. G. Antipov, N. I. Matveeva, S. A. Pulkin, and S. V. Uvarova, *Opt. Spectr.* **121**, 879 (2016)].