

ПРОЯВЛЕНИЕ МЕДЛЕННОЙ ДИНАМИКИ В ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ СПИНОВЫХ СТРУКТУРАХ

Д. А. Друзьев, В. В. Хитринцева, П. В. Прудников*

*Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
644077, Омск, Россия*

Поступила в редакцию 2 марта 2025 г.,
после переработки 7 июня 2025 г.
Принята к публикации 21 июля 2025 г.

Представлены результаты численного Монте-Карло-исследования поведения трехслойной наноструктуры с намагниченностью, ориентированной в плоскости пленки, с толщиной ферромагнитной пленки $N = 3, 11, 21$ монослоев. Исследовано неравновесное поведение структуры при расчетных значениях критической температуры, проанализированы временные зависимости автокорреляционной функции при эволюции из различных начальных состояний и динамической восприимчивости при эволюции из высокотемпературного начального состояния. Выявлены эффекты старения в поведении двухвременных характеристик. Рассчитаны значения предельного флуктуационно-диссипативного соотношения для структуры с $N = 3, 11, 21$ монослоями, которые свидетельствуют о нарушении флуктуационно-диссипативной теоремы при неравновесном критическом поведении.

DOI: 10.7868/S3034641X25100106

1. ВВЕДЕНИЕ

Ультратонкие магнитные пленки — это тонкие слои магнитного материала, которые используются для изготовления жестких дисков и других устройств хранения информации. Одним из главных преимуществ применения ультратонких магнитных пленок в данных устройствах является высокая плотность записи данных. В результате больше информации может быть сохранено на более компактном носителе, что увеличивает емкость жесткого диска. Кроме того, ультратонкие магнитные пленки обладают высокой стойкостью к износу и повреждениям, что делает их более надежными и долговечными. Они также обладают высокой скоростью чтения и записи данных, что позволяет быстро обрабатывать большие объемы информации [1–4].

В целом, ультратонкие магнитные пленки являются важным компонентом многих современных технологий хранения данных и продолжают развиваться для улучшения производительности и надежности. Поэтому физика ультратонких магнитных пленок в последние годы очень сильно развивается, проводится множество исследований мультислойных структур на их основе как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения [1, 2].

Повышенный интерес к изучению поведения ультратонких магнитных пленок вызывает наличие у них уникальных свойств, значительно отличающихся от свойств объемных металлов. Использование ферромагнитных пленок на основе различных переходных металлов Fe, Co и Ni в искусственно созданных многослойных сверхструктурах приводит к таким интересным явлениям, как эффект гигантского магнетосопротивления (ГМС) [5–8], при котором сопротивление материала изменяется под воздействием магнитного поля. ГМС нашло широкое применение в электронике и магнитных носителях информации, таких как жесткие диски и магнитные ленты, также ГМС используется в сенсорах магнитных полей и других приборах [6–12].

Наномасштабная периодичность в магнитных мультислойных структурах приводит к возникновению мезоскопических эффектов сильной пространственной спиновой корреляции с медленной релаксационной динамикой намагниченности при замораживании системы в неравновесном состоянии. Для магнитных наноструктур характерны большие времена релаксации, обусловленные увеличенной характеристической корреляционной длиной спиновых взаимодействий. Проведенные экспери-

* E-mail: KhitrincevaVV@omsu.ru

ментальные исследования релаксации намагниченности, представленные в работе [13], выявили в магнитной сверхструктуре на основе Co/Cr эффекты магнитного старения. В работе [14] численное моделирование неравновесного поведения структуры Co/Cr/Co также выявило возникновение эффектов старения, характеризующихся замедлением корреляционных и релаксационных процессов в системе с ростом времени ожидания. Показано, что в отличие от объемных магнитных систем, в магнитных сверхструктурах эффекты старения наблюдаются не только вблизи критической температуры T_c ферромагнитного упорядочения в пленках, но и в широком температурном интервале с $T \leq T_c$. Поэтому существование данных неравновесных эффектов несомненно необходимо учитывать при практическом использовании мультислойных магнитных структур в качестве элементов приборов спинтроники с эффектом ГМС.

Исследование поведения систем, обладающих аномально медленной динамикой, представляет собой значительный интерес для научного сообщества. Внимание к системам с медленной динамикой обусловлено эффектами старения, которые возникают в результате медленной эволюции систем из неравновесного начального состояния, а также нарушениями флуктуационно-диссипативной теоремы [15–21]. Известными примерами таких систем являются спиновые стекла, которые демонстрируют как медленную динамику, так и эффекты старения [20–23]. Однако данные особенности неравновесного поведения наблюдаются и в системах, испытывающих фазовые переходы второго рода [18, 24], поскольку критическая динамика этих систем характеризуется аномально большими временами релаксации.

Статистические численные методы Монте-Карло к настоящему времени успешно зарекомендовали себя при моделировании и описании физических свойств различных магнитных систем как объемных, так и низкоразмерных, с выявлением особенностей, присущих данным системам при фазовых переходах [25, 26]. В работах [27, 28] с использованием методов Монте-Карло осуществлено численное исследование размерных эффектов в критических свойствах многослойных гейзенберговских пленок. Для пленок различной толщины учтено влияние анизотропии, создаваемой кристаллическим полем подложки. Был проведен расчет критических индексов, значения которых продемонстрировали размерный переход от двумерных к трехмерным свойствам пленок по мере увеличения числа слоев ферромагнитных пленок.

В настоящей работе проведено моделирование методами Монте-Карло неравновесного поведения широко используемой в активных элементах спинтроники структуры Co/Cu/Co с различной толщиной N магнитных пленок кобальта для широкого интервала температур $T \leq T_c(N)$. Это позволит выявить зависимость эффектов старения в данных структурах от толщины магнитных пленок N и то, как эта зависимость меняется при переходе от критической температуры $T_c(N)$ магнитного упорядочения в пленках к температурам в магнитоупорядоченной фазе.

Работа посвящена исследованию методом Монте-Карло проявления особенностей медленной динамики в магнитных свойствах многослойной наноструктуры с намагниченностью, ориентированной в плоскости пленки, и толщиной эквивалентных ферромагнитных пленок $N = 3, 11$ и 21 монослоев (МС), соответствующих системе Co/Cu/Co.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ И ИСПОЛЬЗУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Природа магнитного порядка в ультратонких ферромагнитных пленках очень сложна из-за конкуренции между обменными и дипольными взаимодействиями на разных масштабах длины, а также сильного влияния формы и магнитокристаллической анизотропии образцов. Магнитные свойства ультратонких пленок и структур на их основе чувствительны к эффектам анизотропии, создаваемой кристаллическим полем подложки или немагнитных прослоек. Поэтому физические свойства тонких ферромагнитных пленок на основе Fe, Co и Ni и их взаимодействия в структурах необходимо описывать в рамках анизотропной модели Гейзенберга [27, 28].

Анизотропная модель Гейзенберга представляет собой теоретическую модель в области магнетизма, которая описывает поведение магнитных моментов в кристаллических материалах, обладающих анизотропией — свойством, при котором физические характеристики кристаллов зависят от направления в пространстве. В рамках классической модели Гейзенберга магнитные моменты рассматриваются как векторы, которые взаимодействуют друг с другом и с внешним магнитным полем. Анизотропия учитывается путем добавления дополнительного члена в гамильтониан модели, который зависит от ориентации магнитных моментов в пространстве. Анизо-

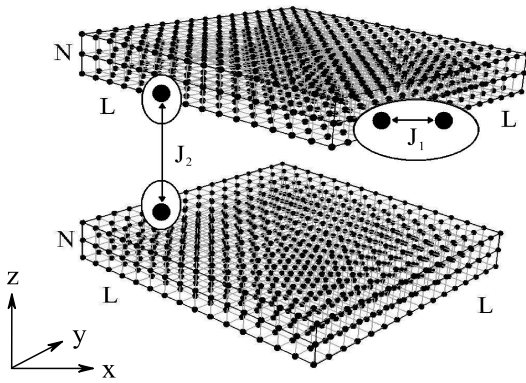


Рис. 1. Схематическое изображение многослойной наноструктуры

тропная модель Гейзенберга используется для описания магнитных свойств различных материалов, таких как магниты с одноосной анизотропией, ферромагнетики и антиферромагнетики.

Магнитные свойства сверхтонких пленок переходных металлов, контактирующих с немагнитными пленками благородных металлов, описываются анизотропной моделью Гейзенберга [28–30]:

$$\begin{aligned}
 H = & -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle}^{N_s^{(1,2)}} [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 - \Delta(N)) S_i^z S_j^z] - \\
 & - J_2 \sum_{\langle i \in N_1, j \in N_2 \rangle}^{L^2} [S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 - \Delta(N)) S_i^z S_j^z],
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где S_i^x, S_i^y, S_i^z — компоненты трехмерного единичного спинового вектора \mathbf{S}_i в участках ГЦК-решетки трехслойной структуры Co/Cu/Co; $N_s^{(1,2)} = N \times L \times L$ — число спинов в пленке 1 и 2 с линейным размером пленок $L = 64$; $\Delta(N)$ — безразмерный параметр анизотропии, зависящий от толщины ферромагнитной пленки (в данной работе $\Delta(N = 3) = 0.665, \Delta(N = 11) = 0.22, \Delta(N = 21) = 0.02$); J_1 — интеграл обменного взаимодействия между спинами внутри пленки, $J_2 = -0.1J_1$ — обменный интеграл междослоевое взаимодействия между спинами на внутренней поверхности пленок. Отрицательное значение J_2 указывает на то, что обменное междослоевое взаимодействие между спинами ферромагнитных слоев имеет антиферромагнитный характер, при этом намагниченности соседних слоев направлены в противоположные стороны. Сама структура схематически представлена на рис. 1.

При исследовании систем используются различные методы моделирования их поведения. Как правило, методы моделирования делятся на локальные и кластерные в зависимости от способа переворота спинов. Идея локальных методов заключается в том, что переворот одного спина приводит к небольшим шагам системы в фазовом пространстве. Все состояния системы оказываются сильно скоррелированными между собой. Поскольку локальные алгоритмы точно отражают динамику системы, их можно применять для изучения как неравновесного, так и равновесного поведения. Однако вблизи критической температуры возникает явление критического замедления и для достижения равновесного состояния требуется большее количество шагов Монте-Карло.

Для сокращения времени вычислений при описании равновесного критического поведения удобно использовать кластерные алгоритмы, такие как алгоритм Вольфа с переворотом одного кластера [31] или алгоритм Свендсена – Ванга с переворотом нескольких кластеров [32]. Поскольку в этих алгоритмах переворачиваются целые кластеры спинов, система совершает скачки в фазовом пространстве, состояния становятся слабо зависимыми друг от друга и для достижения состояния равновесия требуется меньше шагов Монте-Карло. Однако у кластерных алгоритмов есть недостаток: они неприменимы для изучения неравновесного критического поведения, поскольку большие скачки в фазовом пространстве искажают динамику системы [33]. При исследовании динамики необходимо учитывать физическую эволюцию во времени, поэтому в таких случаях используются алгоритмы с пошаговым переворотом спинов, такие как алгоритм Метрополиса или аналогичные динамике Глаубера.

Поскольку целью данной работы является исследование неравновесного критического поведения, то для моделирования использовались локальные алгоритмы. Так, для моделирования равновесного поведения и неравновесного критического поведения намагниченности и автокорреляционной функции использовался наиболее распространенный алгоритм — алгоритм Метрополиса.

Для моделирования неравновесного критического поведения при расчете динамической восприимчивости также применялся алгоритм односпиновых переворотов — алгоритм глауберовской динамики. Применение алгоритма глауберовской динамики позволяет упростить моделирование динамической восприимчивости и не учитывать влияния внешнего поля [34, 35].

Динамика Глаубера определяется вероятностями перехода при перевороте одного спина из конфигурации \mathbf{S}_i в новое состояние \mathbf{S}'_i :

$$W(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}'_i) = \frac{\exp[-\beta H_i(\mathbf{S}'_i)]}{\exp[-\beta H_i(\mathbf{S}'_i)] + \exp[-\beta H_i(\mathbf{S}_i)]}, \quad (2)$$

где $\beta = 1/T$. Обе динамики обладают одинаковыми динамическими показателями, и значительных изменений в термодинамических величинах не ожидается.

Одной из особенностей алгоритма является реализация переворота спина. Выбранный для переворота спин \mathbf{S}_i раскладывается на две составляющие — параллельную \mathbf{S}_i^{\parallel} и перпендикулярную \mathbf{S}_i^{\perp} проекции на направление случайного единичного вектора \mathbf{r}_i . В результате переворота перпендикулярная составляющая остается неизменной, а направление параллельной составляющей изменяется на противоположное. В работе [36] была реализована следующая схема переворота спинов:

$$\mathbf{S}'_i = \mathbf{S}_i - 2(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i,$$

где \mathbf{r}_i — случайный единичный вектор. Поскольку $\mathbf{S}_i^{\parallel} = (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i$ представляет собой параллельную проекцию спина \mathbf{S}_i на \mathbf{r}_i , данное преобразование эквивалентно перевороту этой проекции $\mathbf{S}_i^{\parallel} \rightarrow -\mathbf{S}_i^{\parallel}$ при сохранении перпендикулярной составляющей \mathbf{S}_i^{\perp} .

Главная особенность расчетов заключается в необходимости вычисления производной вероятности перехода по внешнему полю. При использовании алгоритма Метрополиса данная производная имеет разрыв в точке $\Delta H = 0$. Это означает, что алгоритм Метрополиса не подходит для вычисления функции отклика. На рис. 2 представлено сравнение вероятностей перехода для разных алгоритмов, демонстрирующее принципиальное различие в их поведении.

2.1. Медленная динамика и эффекты старения

Мультислойные структуры характеризуются аномально медленной динамикой с предсказываемыми и наблюдаемыми эффектами старения и нарушениями флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) в процессе эволюции систем из неравновесного начального состояния.

ФДТ — теорема статистической физики, связывающая флуктуации системы (их спектральную плотность) с ее диссипативными свойствами [37].

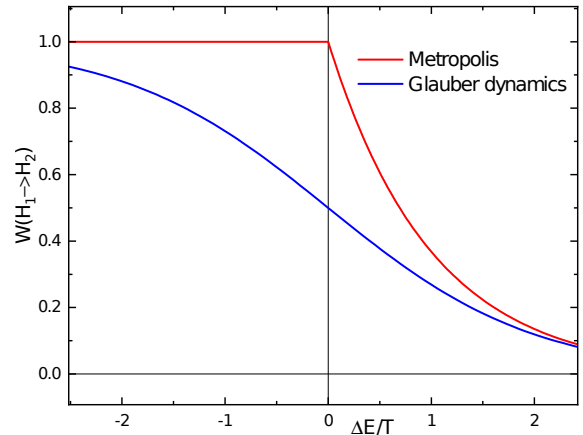


Рис. 2. Вероятность переворота спина W для алгоритмов Метрополиса и глауберовской динамики

ФДТ выводится из предположения о том, что отклик системы на спонтанные флуктуации имеет ту же природу, что и отклик на малое внешнее воздействие. Отклонение поведения систем от флуктуационно-диссипативной теоремы является поводом для публикаций в ведущих научных журналах [38].

Мультислойные магнитные наноструктуры как системы с медленной динамикой характеризуются проявлением эффектов старения в двухвременной зависимости автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ от времени ожидания t_w и времени наблюдения $t - t_w$. Эффекты старения отражают замедление процессов корреляции и релаксации в системе. Следовательно, данные функции являются ключевыми характеристиками для изучения неравновесной критической динамики системы. Автокорреляционная функция $C(t, t_w)$ и динамическая восприимчивость $\chi(t, t_w)$ рассматриваются как характеристики неравновесного поведения.

В настоящей работе для моделирования функции автокорреляции использовался алгоритм Метрополиса

$$C(t, t_w) = \left\langle \frac{1}{N_s^{(1)}} \sum_{i=1 \in N_1}^{N_s^{(1)}} \mathbf{S}_i(t) \mathbf{S}_i(t_w) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{N_s^{(1)}} \sum_{i=1 \in N_1}^{N_s^{(1)}} \mathbf{S}_i(t) \right\rangle \left\langle \frac{1}{N_s^{(1)}} \sum_{i=1 \in N_1}^{N_s^{(1)}} \mathbf{S}_i(t_w) \right\rangle, \quad (3)$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение.

Для моделирования динамической восприимчивости использовался алгоритм глауберовской ди-

намики. В соответствии с методологией [34, 35, 39] выражение для динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ в модели Гейзенберга можно записать в виде

$$\chi(t, t_w) = \frac{1}{T_c N_s^{(1)}} \sum_{i=1 \in N_1}^{N_s^{(1)}} \langle \mathbf{S}_i(t) \Delta \mathbf{S}_i(t_w) \rangle, \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{S}_i(t_w) = \sum_{i=1}^{t_w} \mathbf{S}_i^{\parallel} \left(1 - \text{th} \left(\frac{1}{2T_c} \Delta H_i(t) \right) \right). \quad (5)$$

Одним из существенных проявлений медленной динамики является нарушение ФДТ, которая позволяет сравнивать эксперименты двух типов: по рассеянию и с воздействием внешних полей на состояние системы. Обобщение ФДТ для систем с медленной динамикой характеризуется введением в соотношение, связывающее функцию отклика $R(t, t_w)$ с корреляционной функцией $C(t, t_w)$, новой величины $X(t, t_w)$, называемой флуктуационно-диссипативным отношением (ФДО) [17, 40]:

$$R(t, t_w) = \frac{X(t, t_w)}{T} \frac{\partial C(t, t_w)}{\partial t_w}. \quad (6)$$

ФДО рассматривается как мера неравновесности системы и нарушения ФДТ. Известно, что в моменты времени $t > t_w \gg t_{rel}$, соответствующие равновесному состоянию системы, ФДТ устанавливает $X(t, t_w) = 1$. Но для неравновесного состояния в моменты времени $t, t_w \ll t_{rel}$ ФДО $X(t, t_w) \neq 1$. Асимптотическое значение ФДО вводится как универсальная характеристика неравновесного процесса в различных системах [18, 39, 41]:

$$X^\infty = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_w). \quad (7)$$

Изучение поведения функции отклика $R(t, t_w)$ численными методами вызывает некоторые трудности, связанные с большими временными и вычислительными затратами. Применена методика, позволяющая рассчитать функцию отклика без применения внешнего магнитного поля, осуществляя расчет обобщенной восприимчивости как интегральной функции отклика [35]:

$$\chi(t, t_w) = T \int_0^{t_w} R(t, t') dt'. \quad (8)$$

В долговременном режиме при $(t - t_w) \rightarrow \infty$ динамическая восприимчивость принимает следующий вид:

$$T\chi(t, t_w) = \int_0^{t_w} X(t, t') \frac{\partial C(t, t')}{\partial t'} dt' = \int_0^{C(t, t_w)} X(C) dC. \quad (9)$$

Таким образом, асимптотическое значение ФДО X^∞ можно определить по выражению

$$X^\infty = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \lim_{C(t, t_w) \rightarrow 0} T_c \frac{\partial \chi(t, t_w)}{\partial C(t, t_w)}. \quad (10)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОНТЕ-КАРЛО-МОДЕЛИРОВАНИЯ

3.1. Расчет равновесных характеристик

Важной частью описания статистических моделей является параметр порядка, который для структуры с антиферромагнитной связью определяется шахматной намагниченностью системы $\mathbf{M}_{stg} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$, где \mathbf{M}_n — намагниченности первой и второй ферромагнитных пленок. Для рассматриваемой нами системы эквивалентных ферромагнитных пленок S_0 с одинаковыми N в качестве параметра порядка можно использовать полную намагниченность одной из ферромагнитных пленок структуры, нормированную на количество спинов в пленке N_s :

$$\mathbf{M} = \left\langle \left(\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{S}_i \right) \right\rangle. \quad (11)$$

Исследование неравновесной динамики системы проводится при критической температуре T_c и в низкотемпературной фазе при температурах замораживания $T_s < T_c$. Температуру фазового перехода T_c можно определить методом кумулянтов Биндера $U_4(L, T)$ [42–44]:

$$U_4(L, T) = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{M_4}{M_2^2} \right), \quad (12)$$

где

$$\mathbf{M}_k = \left\langle \left(\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{S}_i \right)^k \right\rangle$$

— k -й момент намагниченности. Форма кумулянта выбрана для выполнения асимптотики $U_4^* = 1$ [43].

Кумулянт $U_4(T, L)$ имеет важную для описания поведения конечных систем скейлинговую форму $U_4(T, L) = u(L^{1/\nu}(T - T_c))$ (рис. 3 а). По пересечениям кривых кумулянтов $U_4(T, L)$ для разных линейных размеров L в некоторой области можно определить критическую температуру T_c , определив центр масс треугольника (рис. 3 б).

Полученные значения критических температур для систем с различной толщиной ферромагнитных пленок приведены в табл. 1. Из представленных данных видно, что с ростом толщины ферро-

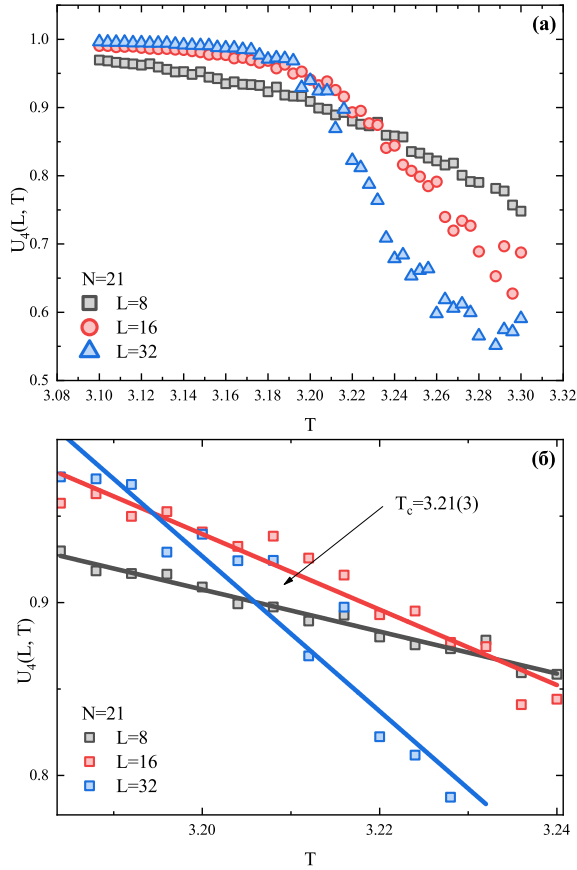


Рис. 3. Температурные зависимости кумулянтов Биндера $U_4(T)$ для системы с толщиной ферромагнитных пленок $N = 21$ и линейными размерами системы $L = 8, 16, 32$

Таблица 1. Значения критических температур для систем с различной толщиной ферромагнитных пленок

N, MC	3	11	21
T_c	2.3918(65)	3.057(3)	3.21(3)

магнитных пленок значение критической температуры возрастает.

3.2. Анализ временного поведения намагниченности

Рассматриваемая трехпленочная структура описывается моделью Гейзенберга с анизотропией типа легкая плоскость, для которой характерна преимущественная ориентация спинов в плоскости xy , т. е. в плоскости пленок. В модели Гейзенберга с легкоплоскостной анизотропией xy -составляющая спинов является долгоживущей и определяет долговременное поведение рассматриваемых характеристик. Из представленной на рис. 4а временной зависимости

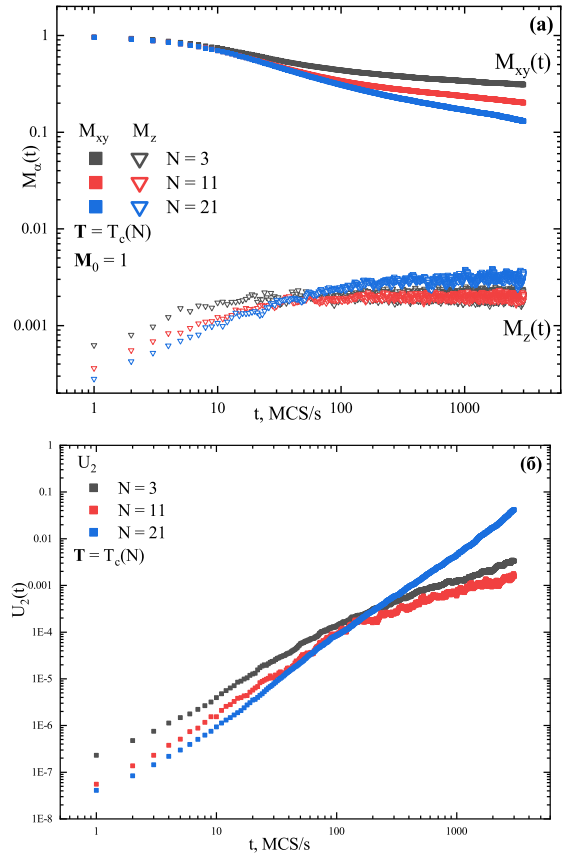


Рис. 4. Временные зависимости xy и z -составляющих намагниченности M_{xy}, M_z (а) и кумулянтов U_2 (б) для систем с $N = 3, 11, 21$

компонент намагниченности M_z и M_{xy} видно, что полная намагниченность M и ее M_{xy} -составляющая совпадают, следовательно, основной вклад вносит компонента M_{xy} , влияние M_z незначительно.

Согласно исследованиям [1, 27, 28], критическое поведение ультратонких ферромагнитных пленок переходных металлов и структур на их основе характеризуется размерным изменением показателей намагниченности, в значениях которых проявляются их низкоразмерные свойства и эффекты влияния магнитной анизотропии. Для определения показателей $\beta/\nu z$ и d/z рассматривалось неравновесное критическое поведение намагниченности (рис. 4а) и кумулянтов U_2 (рис. 4б) при эволюции системы из низкотемпературного начального состояния.

При эволюции системы из низкотемпературного полностью упорядоченного состояния намагниченность убывает согласно скейлинговому соотношению $M(t) \sim t^{-\beta/\nu z}$, а кумулянт Биндера второго порядка демонстрирует степенное поведение $U_2 \sim t^{d/z}$.

Таблица 2. Значения критических показателей

Модель	d	n	β	γ	ν	Метод	β/ν
$N = 3$	2	3				МК	0.122(2)
2D-Ising	2	1	0.125	1.75	1	Точное [45]	0.125
2D-XY	2	2	0.231			РГ [47]	0.125
2D-Heis.	2	3				Точное [48]	
3D-Ising	3	1	0.325	1.241	0.630	РГ [49]	0.516
3D-XY	3	2	0.345	1.316	0.669	РГ [49]	0.517
3D-Heis.	3	3	0.365	1.386	0.705	РГ [49]	0.518

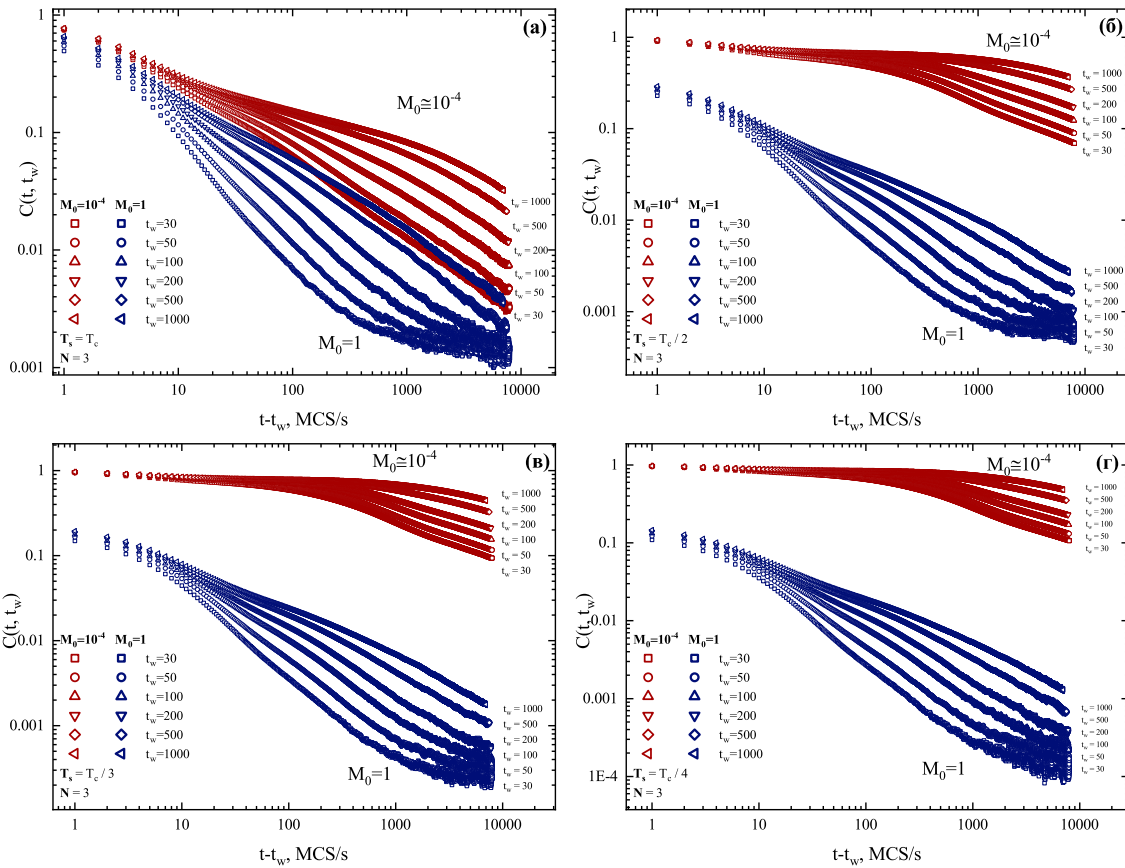


Рис. 5. Временные зависимости автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при эволюции из низкотемпературного ($M_0 = 1$) и высокотемпературного ($M_0 \ll 1$) начальных состояний для системы с толщиной ферромагнитных пленок $N = 3$ при температурах замораживания T_c (а), $T_c/2$ (б), $T_c/3$ (в) и $T_c/4$ (г)

С использованием линейной аппроксимации данных для $M(t)$ и $U_2(t)$, представленных на рис. 4 в двойном логарифмическом масштабе, было определено, что для наноструктуры с толщиной ферромагнитных пленок $N = 3$ MCS соответствующие показатели принимают значения $\beta/\nu z = 0.06090(6)$ и $z = 1.98(4)$. Полученные значения показателей демонстрируют двумерные свойства с $d = 2$, а эффек-

ты анизотропии с намагниченностями, ориентированными в плоскости пленок, приводят к значениям критических индексов $z = 1.98(4)$ и $\beta/\nu = 0.122(2)$, которые в пределах погрешностей хорошо согласуются со значениями $z = 2$ и $\beta/\nu = \eta/2 = 0.125$ [46] для двумерной XY-модели.

Сравнение критического поведения ферромагнитных пленок с легкоплоскостной анизотропией и

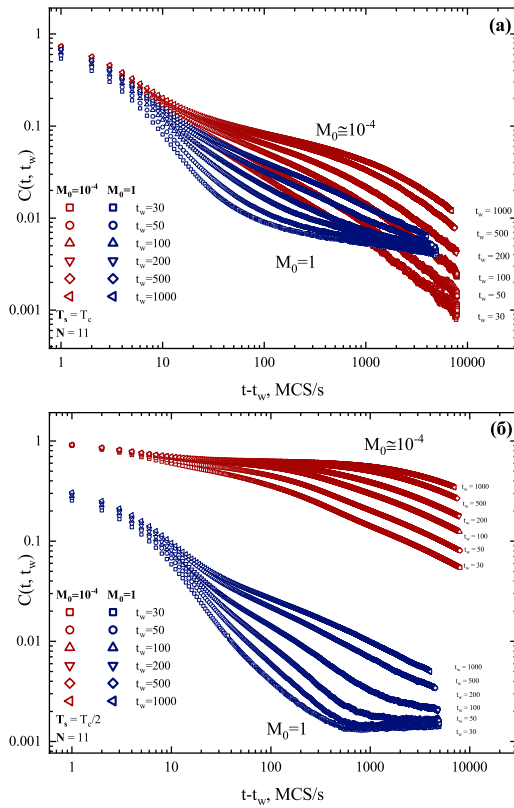


Рис. 6. Временные зависимости автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при эволюции из низкотемпературного ($M_0 = 1$) и высокотемпературного ($M_0 \ll 1$) начальных состояний для системы с толщиной ферромагнитных пленок $N = 11$ при температурах замораживания T_c (а) и $T_c/2$ (б)

классической двумерной XY-моделью основывается на учете размерного кроссовера, влияния анизотропии на динамику системы (см. табл. 2) и особенностей поведения корреляционной длины. Эти факторы определяют условия, при которых тонкопленочная система может демонстрировать критическое поведение, аналогичное одному из предельных случаев.

Физическая суть сравнения раскрывается через анализ конкуренции между характерными пространственными масштабами системы. При малой толщине пленки, когда ее размер L вдоль оси анизотропии существенно меньше межплоскостной корреляционной длины ξ_z , система демонстрирует чисто двумерное поведение. В этом случае критические индексы совпадают с предсказаниями для двумерной (2D) XY-модели, а фазовый переход происходит по механизму Березинского–Костерлица–Таулесса. Однако по мере увеличения толщины пленки, когда L становится сравнимым с ξ_z , наблюдает-

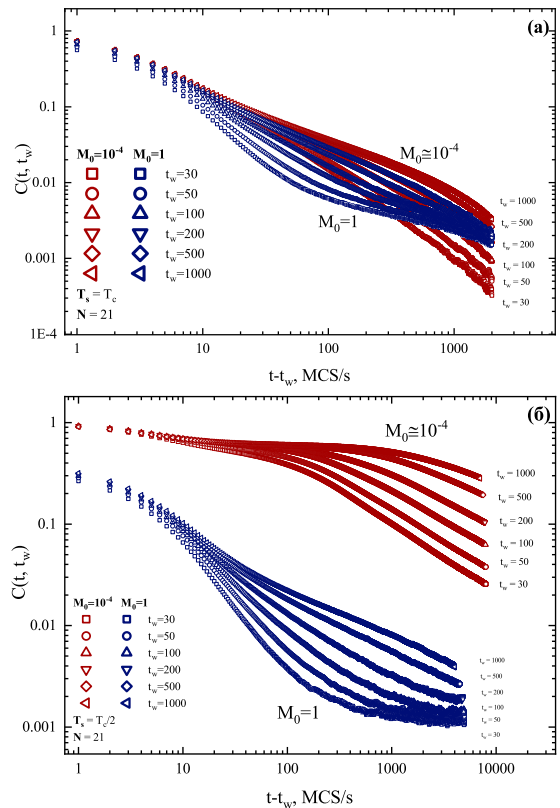


Рис. 7. Временные зависимости автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при эволюции из низкотемпературного ($M_0 = 1$) и высокотемпературного ($M_0 \ll 1$) начальных состояний для системы с толщиной ферромагнитных пленок $N = 21$ при температурах замораживания T_c (а) и $T_c/2$ (б)

ся кроссовер к трехмерному (3D) поведению, сопровождающийся изменением критических индексов.

Критические свойства ультратонких пленок чувствительны к эффектам анизотропии, создаваемой кристаллическим полем подложки. Учет данных эффектов в многослойных системах может приводить к изменению критического поведения. В случае легкоплоскостной анизотропии флуктуации спинов вдоль оси z оказываются подавленными, что сводит поведение системы к двумерной XY-модели. Напротив, ослабление анизотропии приводит к развитию трехмерных флуктуаций и отклонению от XY-подобного поведения.

3.3. Анализ динамики двухвременных характеристик

Влияние начальных состояний на динамику системы. В ходе работы было изучено влияние начальных состояний (высокотемпературного и

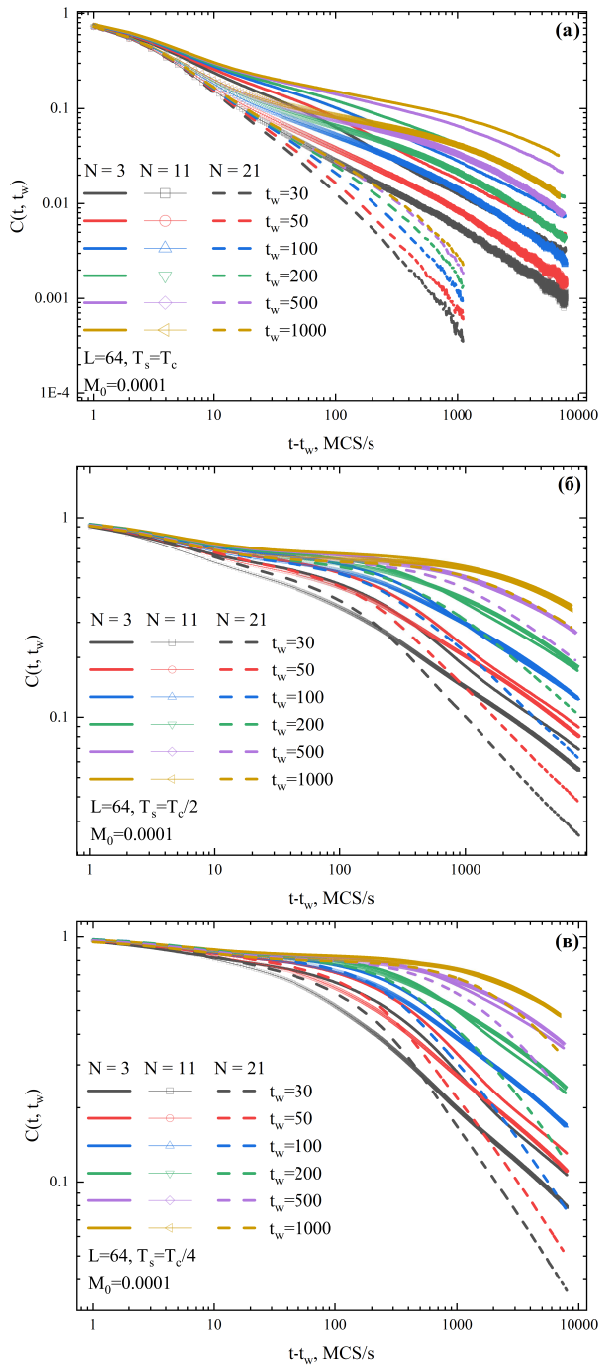


Рис. 8. Временные зависимости автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при эволюции из высокотемпературного ($M_0 \ll 1$) начального состояния для систем с толщиной ферромагнитных пленок $N = 3, 11, 21$ при температурах замораживания T_c (а), $T_c/2$ (б) и $T_c/4$ (в)

низкотемпературного) на динамику системы с толщиной ферромагнитных пленок $N = 3, 11, 21$ МС при различных температурах замораживания T_s . Из представленных на рис. 5–7 данных следует, что

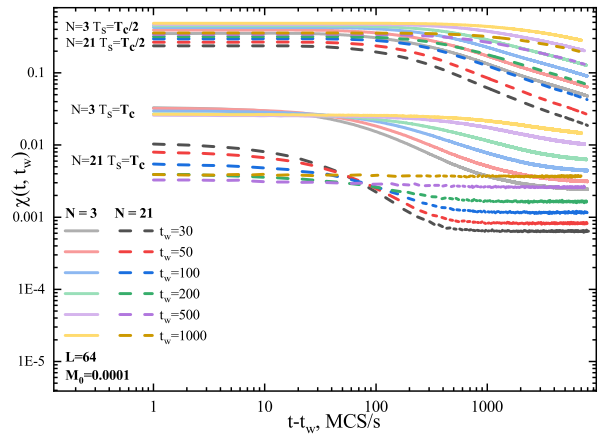


Рис. 9. Сопоставление временных зависимостей динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ при эволюции из высокотемпературного ($M_0 \ll 1$) начального состояния для систем с толщиной ферромагнитных пленок $N = 3, 21$ при температурах замораживания T_c и $T_c/2$

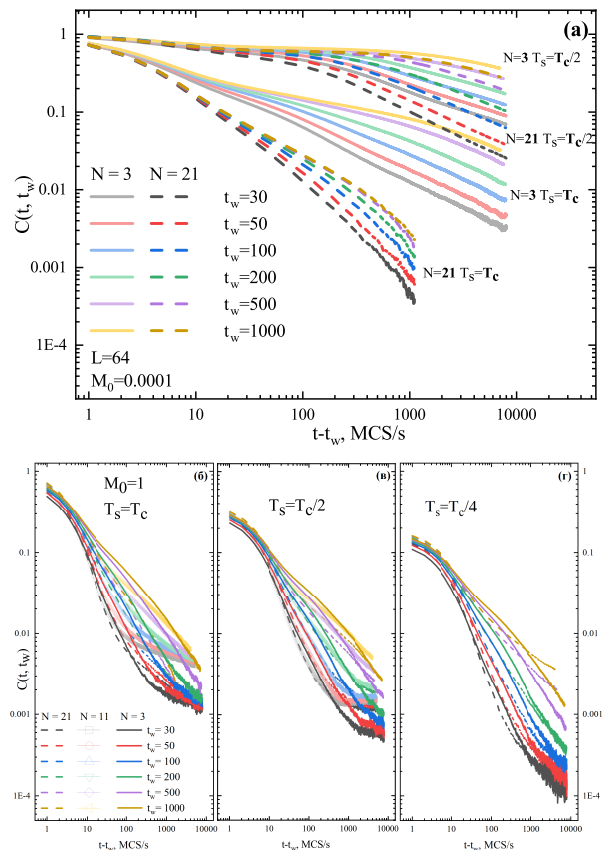


Рис. 10. Сопоставление временных зависимостей автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при эволюции из высокотемпературного ($N = 3, 21$ при температурах замораживания T_c и $T_c/2$) (а) и низкотемпературного ($N = 3, 11, 21$ при температурах замораживания T_c (б), $T_c/2$ (в) и $T_c/4$) (г) начальных состояний

при эволюции системы из низкотемпературного начального состояния автокорреляционная функция $C(t, t_w)$ характеризуется для всех температур замораживания T_s более быстрым временным убыванием и ослаблением влияния времени ожидания t_w , нежели при эволюции из высокотемпературного начального состояния. Важной особенностью наноструктур из ультратонких ферромагнитных пленок является проявление эффектов старения не только при критической температуре $T_s = T_c$, но и во всей низкотемпературной фазе $T_s < T_c$ для всех рассмотренных толщин ферромагнитных пленок.

Стоит отметить, что с ростом толщины ферромагнитных пленок N наблюдается сближение кривых автокорреляционных функций $C(t, t_w)$ при эволюции структур из высокотемпературного и низкотемпературного начальных состояний.

Также примечательно, что автокорреляционная функция $C(t, t_w)$ при эволюции из низкотемпературного начального состояния характеризуется более медленным убыванием с увеличением температуры замораживания $T_s \leq T_c$, что противоположно поведению $C(t, t_w)$ при эволюции системы из высокотемпературного начального состояния, когда с ростом $T_s \leq T_c$ убывание $C(t, t_w)$ становится более быстрым.

Влияние толщины ферромагнитных пленок на динамику системы. Одним из рассматриваемых в данном исследовании вопросов являлось изучение влияния толщины ферромагнитных пленок N в структуре на неравновесное поведение автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$.

В результате проведенных расчетов (рис. 8–10) были выявлены размерные эффекты: а именно, автокорреляционная функция $C(t, t_w)$ и динамическая восприимчивость $\chi(t, t_w)$ характеризуются более быстрым временным убыванием с увеличением толщины ферромагнитных пленок N при критической температуре $T_c(N)$. Наблюдается ослабление эффектов старения с ростом толщины пленок N , что обусловлено ослаблением критической корреляции спинов при размерном переходе в наноструктурах от пленок с квазидвумерными свойствами к пленкам с объемными трехмерными свойствами.

Анализ временных зависимостей $C(t, t_w)$ и $\chi(t, t_w)$ показывает, что данные характеристики имеют более сильную размерную зависимость от N при критических температурах $T_c(N)$, чем в низкотемпературной фазе с $T_s < T_c$.

Сравнение поведения кривых автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при эволюции из высокотем-

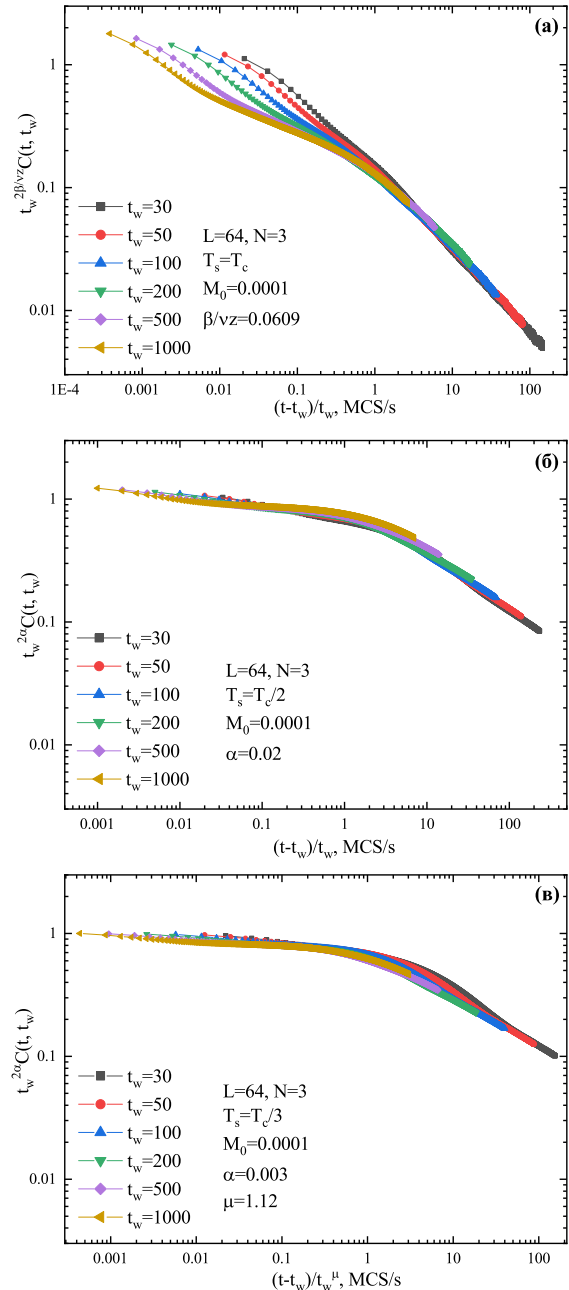


Рис. 11. Проверка скейлинговых соотношений для автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при температурах замораживания T_c (а), $T_c/2$ (б) и $T_c/3$ (в) для толщины пленок $N = 3$ при эволюции системы из высокотемпературного начального состояния

пературного и низкотемпературного начальных состояний позволяет отметить, что размерная зависимость от толщины ферромагнитных пленок N схожа для двух начальных состояний. Как при высокотемпературной, так и при низкотемпературной критической эволюции с $T_s = T_c$ увеличение толщи-

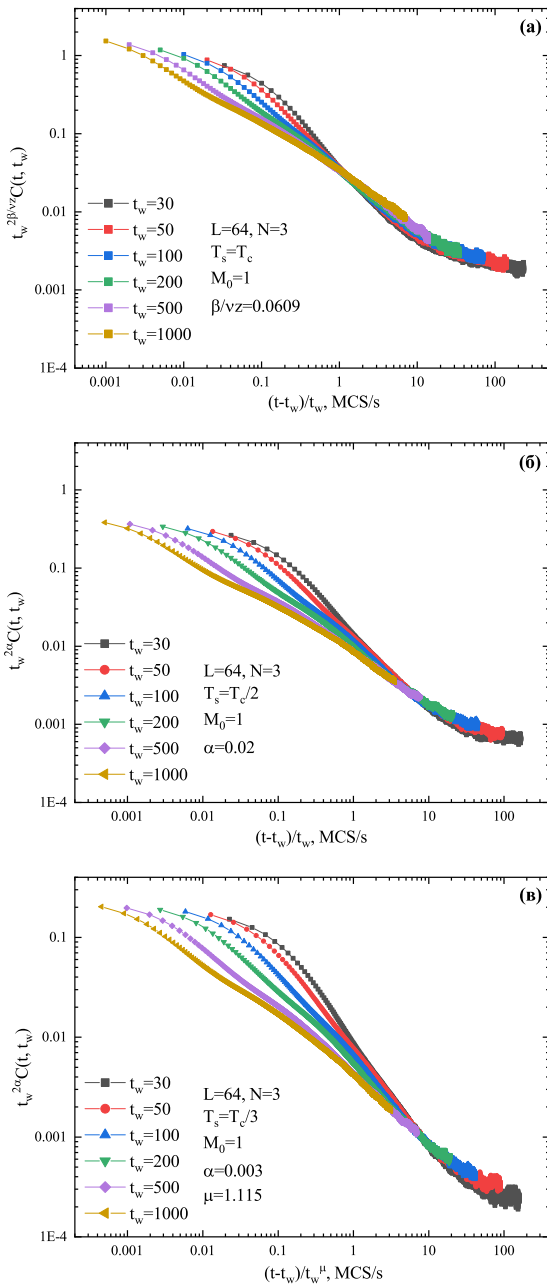


Рис. 12. Проверка скейлинговых соотношений для автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при температурах замораживания T_c (а), $T_c/2$ (б) и $T_c/3$ (в) для толщины пленок $N = 3$ при эволюции системы из низкотемпературного начального состояния

ны пленок от $N = 3$ МС к $N = 21$ МС приводит к более быстрому временному убыванию $C(t, t_w)$ и уменьшению зависимости от времени ожидания t_w , т.е. к ослаблению эффектов старения. Отметим, однако, что указанные выше размерные эффекты ослабевают с ростом N при рассмотрении медлен-

ной динамики структур в низкотемпературной фазе с $T_s < T_c$.

Скейлинговые свойства и соотношения. Двухвременные функции, характеризующиеся медленной динамикой, в долговременном режиме $t - t_w \gg t_w$ описываются соотношениями

$$C(t, t_w) \sim t_w^{-2a} F_C(t/t_w), \tag{13}$$

$$\chi(t, t_w) \sim t_w^{-2a} F_\chi(t/t_w) \tag{14}$$

с универсальными скейлинговыми функциями $F_C(t/t_w)$ и $F_\chi(t/t_w)$, убывающими в долговременном режиме по степенным законам [41]:

$$F_C(t/t_w) \sim (t/t_w)^{-c_a}, \tag{15}$$

$$F_\chi(t/t_w) \sim (t/t_w)^{-c_\chi}. \tag{16}$$

При критической температуре замораживания $T_s = T_c$ показатель a определяется комбинацией критических индексов $\beta/\nu z$.

На рис. 11 и 12 представлены скейлинговые зависимости автокорреляционной функции из высокотемпературного и низкотемпературного начальных состояний для температур замораживания $T_s = T_c$, $T_c/2$ и $T_c/3$ для пленок с толщиной $N = 3$. На представленных графиках видно, что в критической точке кривые автокорреляционной функции для различных времен ожидания t_w хорошо накладываются в долговременном режиме $t \gg t_w$ как при высокотемпературной, так и при низкотемпературной эволюции с использованием показателя $\beta/\nu z = 0.0609$, полученного ранее на основе временного поведения намагниченности. В низкотемпературной фазе с $T_s = T_c/2$ при эволюции систем из высокотемпературного и низкотемпературного начальных состояний коллапс данных возможен при показателе $a = 0.02$. Поведение автокорреляционной функции может описываться теорией канонического старения.

С понижением температуры замораживания до $T_s = T_c/3$ происходит нарушение коллапса данных в долговременном режиме. Совпадение данных на некоторой универсальной кривой можно восстановить введением показателя сверхстарения $\mu = 1.115$ для эволюции системы из низкотемпературного начального состояния и $\mu = 1.12$ для эволюции системы из высокотемпературного начального состояния.

Поскольку в мультислойных наноструктурах на основе системы Co/Cu с увеличением толщины ферромагнитных пленок ослабевают эффекты анизотропии, система с толщиной пленок $N = 21$ соответствует трехмерной изотропной модели Гейзенберга. Для проверки скейлинговых соотношений автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ использовался

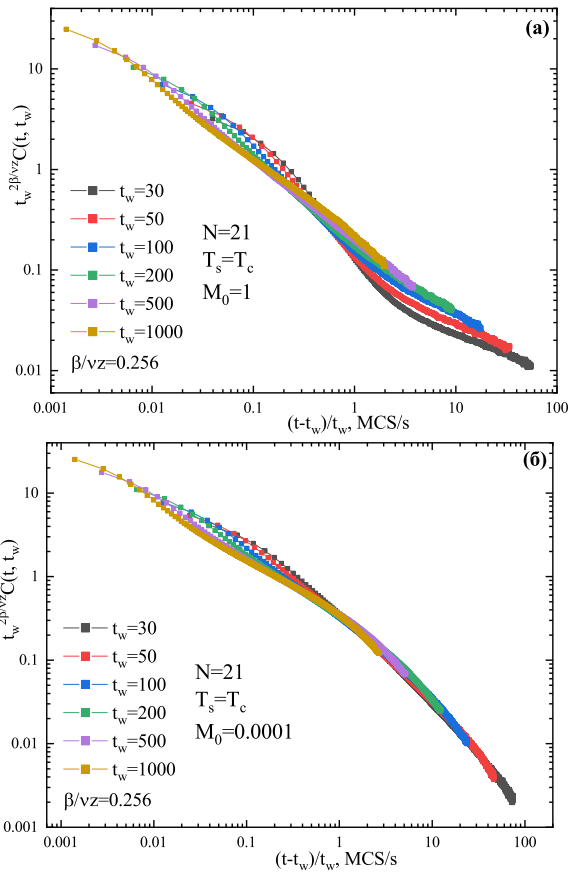


Рис. 13. Проверка скейлинговых соотношений для автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ при температурах замораживания $T_s = T_c$ для толщины пленок $N = 21$ при эволюции системы из высокотемпературного (а) и низкотемпературного (б) начальных состояний

показатель $\beta/\nu z = 0.2560(1)$, полученный в работе [50]. Кривые автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ на рис. 13 демонстрируют коллапс данных для различных времен ожидания t_w как при высокотемпературной, так и при низкотемпературной эволюции.

Для построения скейлинговых зависимостей динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ при эволюции системы с толщиной ферромагнитных пленок $N = 3$ из высокотемпературного начального состояния также использовался показатель $\beta/\nu z = 0.06090(6)$. На представленных на рис. 14 кривых динамической восприимчивости видно, что поведение $\chi(t, t_w)$ для температур замораживания $T_s = T_c, T_c/2$ описывается теорией канонического старения, как и в случае автокорреляционной функции при эволюции системы из высокотемпературного начального состояния. Однако в низкотемпературной фазе с температурой замораживания $T_s = T_c/4$ поведение динамической восприим-

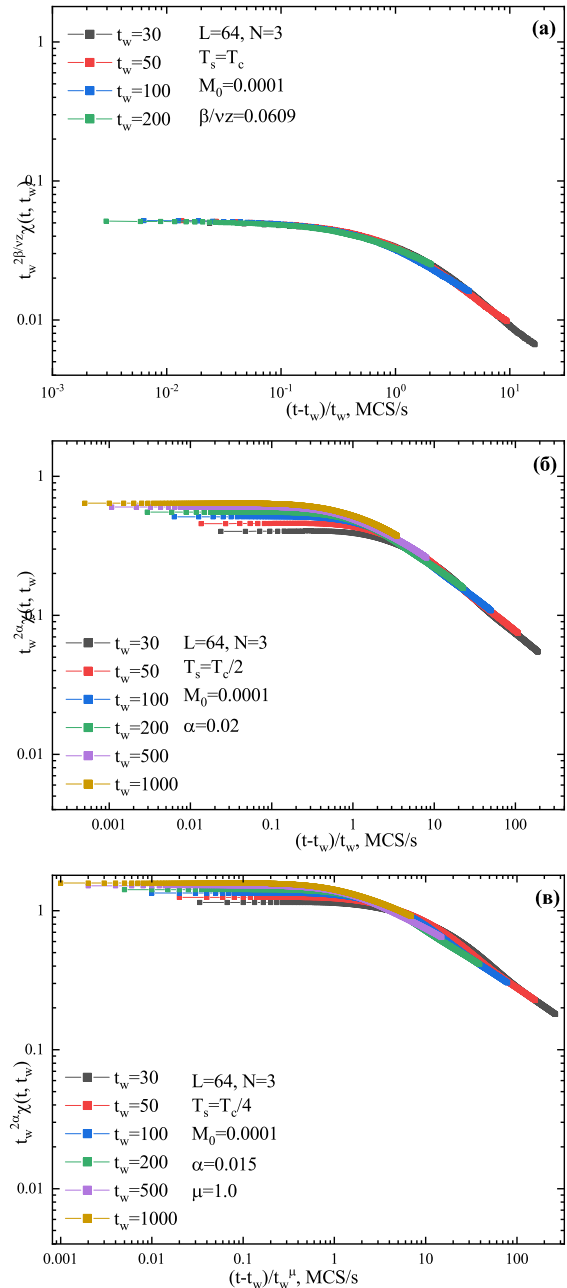


Рис. 14. Проверка скейлинговых соотношений для динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ при температурах замораживания T_c (а), $T_c/2$ (б) и $T_c/4$ (в) для толщины пленок $N = 3$ при эволюции системы из высокотемпературного начального состояния

чивости описывается теорией сверхстарения с введением показателя сверхстарения $\mu = 1.0$.

При построении скейлинговой зависимости динамической восприимчивости для системы с толщиной пленок $N = 21$, так же как и при построении скейлинговых соотношений автокорреля-

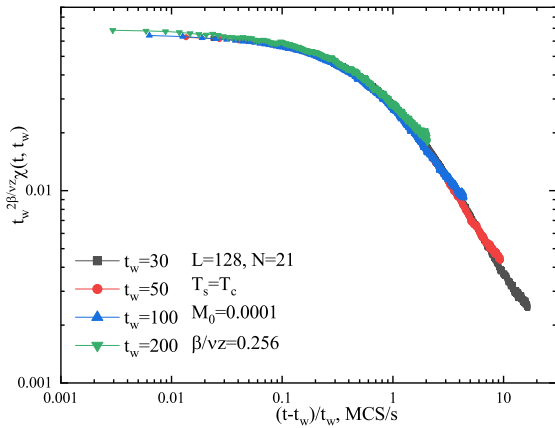


Рис. 15. Проверка скейлинговых соотношений для динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ при температурах замораживания $T_s = T_c$ для толщины пленок $N = 21$ при эволюции системы из высокотемпературного начального состояния

ционной функции $C(t, t_w)$, использовался показатель $\beta/vz = 0.2560(1)$. Результаты, представленные на рис. 15, демонстрируют коллапс данных для различных времен ожидания t_w .

3.4. Расчет флуктуационно-диссипативного отношения

В настоящей статье представлены результаты расчета предельного ФДО X^∞ для мультислойных наноструктур. Нарушение ФДТ является значимым проявлением медленной динамики. Важной универсальной мерой нарушения ФДТ в различных системах является ФДО, которое может быть задано в следующем виде [18, 39, 41]:

$$X^\infty = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_w) = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \lim_{C \rightarrow \infty} T \frac{\partial \chi(t, t_w)}{\partial C(t, t_w)}. \quad (17)$$

Для определения предельных значений ФДО для систем с различной толщиной ферромагнитных пленок $N = 3, 11, 21$ и при различных температурах замораживания были построены параметрические зависимости динамической восприимчивости $T_c \chi(t, t_w)$ от автокорреляционной функции $C(t, t_w)$. Графики параметрической зависимости $T_c \chi(t, t_w)$ от $C(t, t_w)$, представленные на рисунках, позволяют по асимптотической кривизне определить значения ФДО $X(t_w)$ для каждого времени ожидания t_w . Применение к полученным значениям процедур линейной аппроксимации и экстраполяции $X^\infty(t_w \rightarrow \infty)$, позволило определить предельные

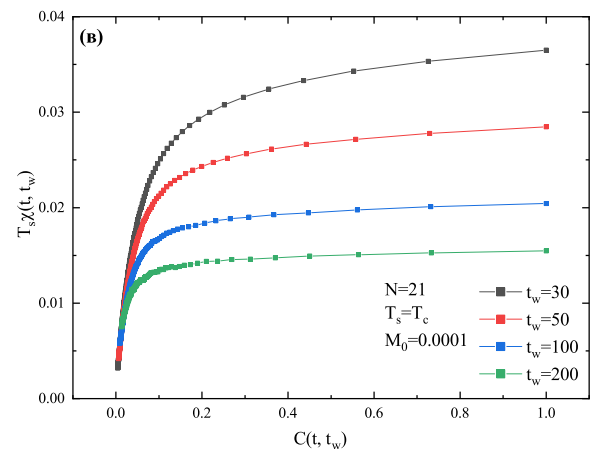
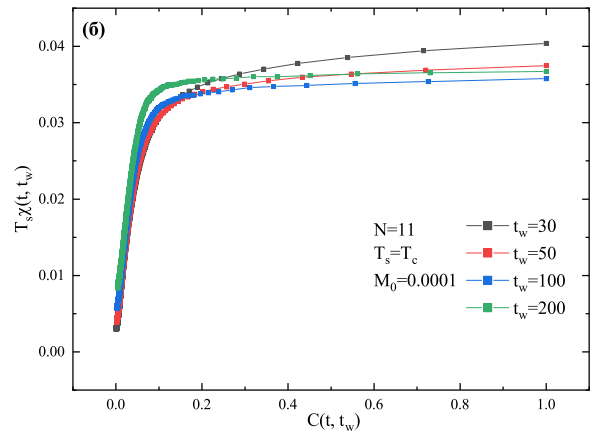
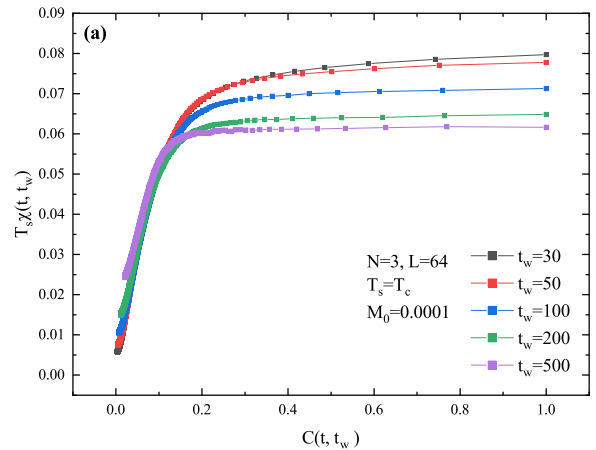


Рис. 16. Параметрические зависимости $T_c \chi(t, t_w)$ от $C(t, t_w)$ для пленок с $N = 3$ (а), 11 (б), 21 (в) при $T_s = T_c$

значения ФДО X^∞ (см. рис. 16–20). Результаты представлены в табл. 3.

Полученное значение предельного ФДО $X^\infty = 0.448(6)$ для трехпленочной магнитной наноструктуры с $N = 3$ находится в хорошем согласии со значением предельного ФДО $X^\infty = 0.444(26)$, полученного в работе [51] для двумерной XY-

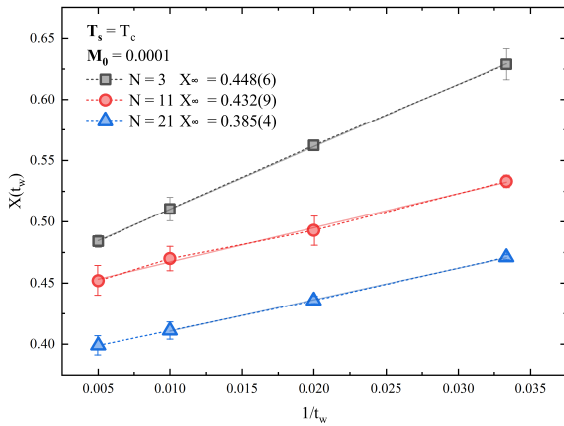


Рис. 17. Линейная аппроксимация ФДО $X(t_w \rightarrow \infty)$ для различных t_w для определения X^∞ для пленок с $N = 3, 11, 21$ при T_c

Таблица 3. Асимптотические значения ФДО для температур $T_s = T_c, T_c/2, T_c/4$ и различной толщине пленок N

T_s	$N = 3$	$N = 11$	$N = 21$
T_c	0.448(6)	0.432(9)	0.385(4)
$T_c/2$	0.909(1)	0.899(2)	0.850(1)
$T_c/4$	0.9672(7)	0.936(3)	0.921(7)

модели при температуре топологического фазового перехода Березинского – Костерлица – Таулесса, что обеспечивается влиянием магнитной анизотропии, ориентирующей намагниченность в плоскости пленок. Для пленок с толщиной $N = 11$ определенное в ходе работы значение ФДО $X^\infty = 0.432(9)$ близко к ФДО $X^\infty = 0.43(4)$ [52] для трехмерной XY-модели. Значение ФДО для системы с $N = 21$ $X^\infty = 0.385(4)$ хорошо соотносится со значением для трехмерной изотропной модели Гейзенберга $X^\infty = 0.383(6)$ [53].

Для систем при температурах замораживания $T_s < T_c$ также были построены параметрические зависимости и определены значения предельного ФДО. Из представленных данных следует, что для температур $T_s < T_c$ значения предельного флуктуационно-диссипативного отношения демонстрируют существенно большие значения, чем при критической температуре T_c . Из вида параметрической зависимости и значений ФДО, приближающихся к единице, можно сделать вывод об уменьшении эффектов неравновесности при понижении температуры замораживания.

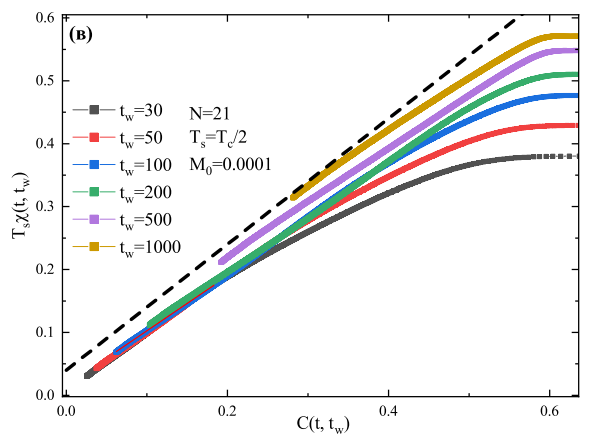
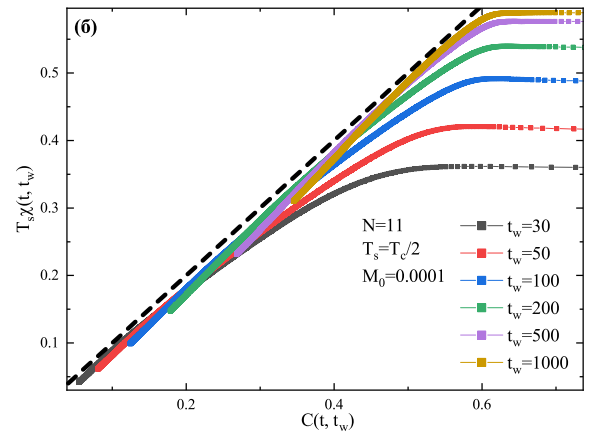
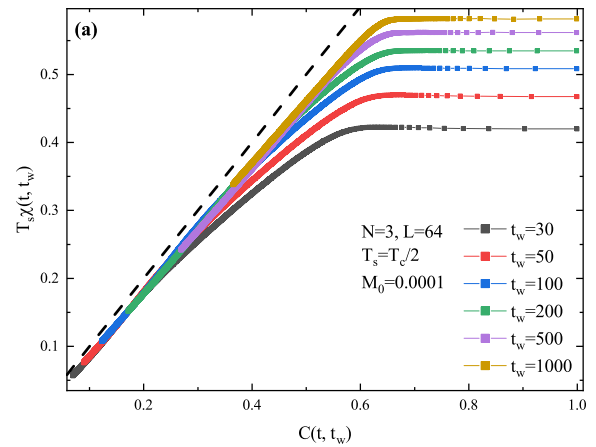


Рис. 18. Параметрические зависимости $T_c \chi(t, t_w)$ от $C(t, t_w)$ для пленок с $N = 3$ (а), 11 (б), 21 (в) при $T_s = T_c/2$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе было осуществлено численное Монте-Карло-исследование особенностей проявления медленной динамики в магнитных свойствах мультислойной наноструктуры, состоящей из двух ферромагнитных пленок с $N = 3, 11, 21$,

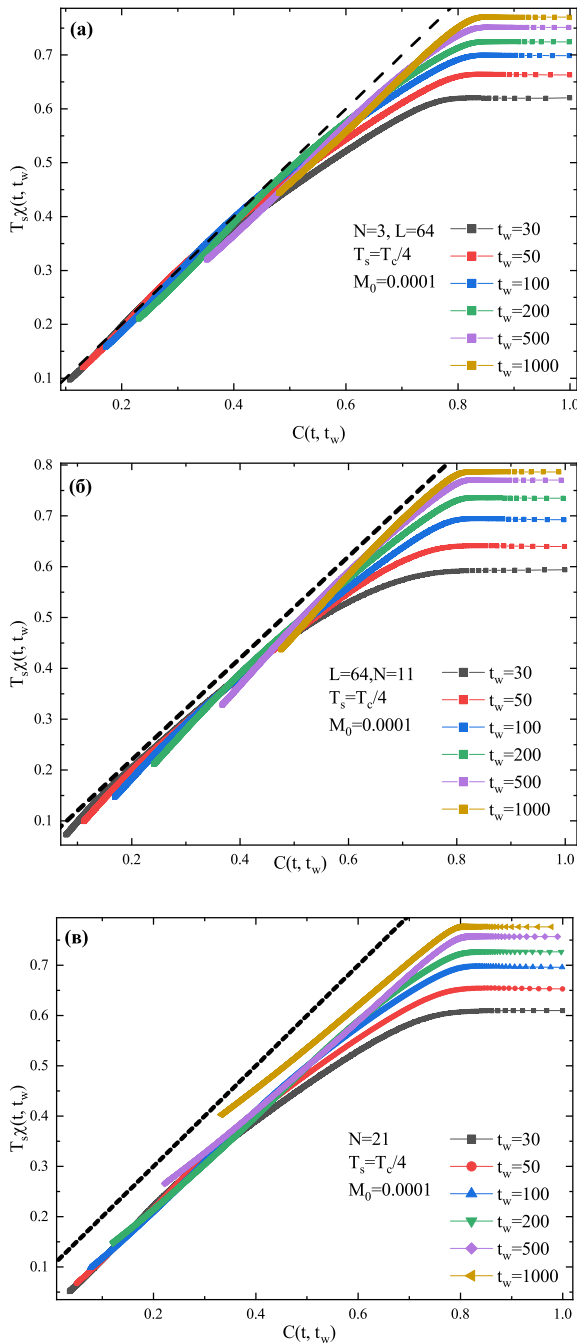


Рис. 19. Параметрические зависимости $T_s \chi(t, t_w)$ от $C(t, t_w)$ для пленок с $N = 3$ (а), 11 (б), 21 (в) при $T_s = T_c/4$

разделенных пленкой немагнитного металла и связанных обменным взаимодействием, носящим антиферромагнитный характер. Описание свойств такой структуры осуществлялось с применением модели Гейзенберга с анизотропией типа «легкая плоскость». В ходе исследования были рассчитаны значения критической температуры $T_c(N)$ и темпера-

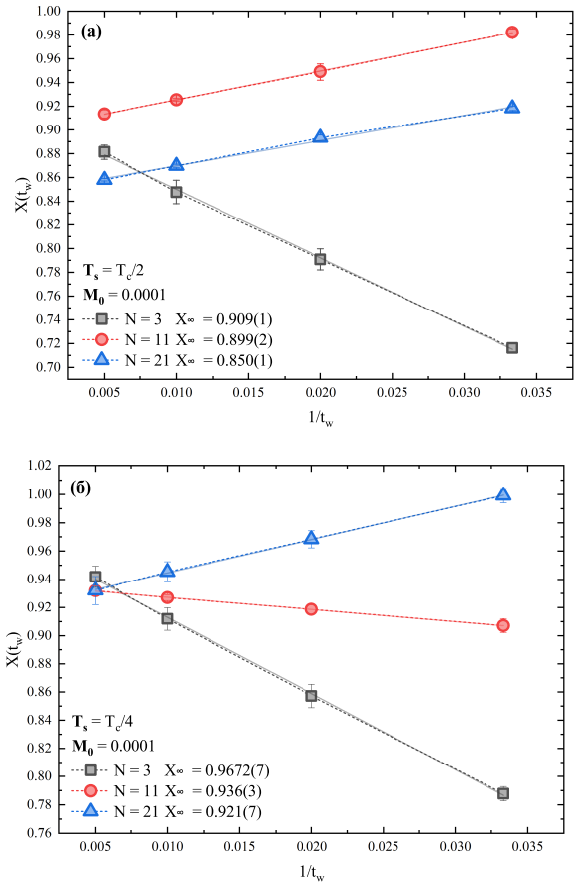


Рис. 20. Линейные аппроксимации ФДО $X(t_w \rightarrow \infty)$ для различных t_w для определения X^∞ для пленок с $N = 3$, 11, 21 при $T_c/2$ (а) и $T_c/4$ (б)

туры замораживания $T_s(N) < T_c(N)$, при которых изучались размерные изменения в характеристиках неравновесного поведения структур с различной толщиной ферромагнитных пленок.

Анализ временной зависимости намагниченности $M(t)$ и кумулянта Биндера второго порядка $U_2(t)$ позволил определить критические показатели $\beta/\nu z = 0.06090(6)$ и $z = 1.98(4)$ для наноструктуры с толщиной пленок $N = 3$. Полученные значения демонстрируют двумерные свойства ($d = 2$), причем влияние легкоплоскостной анизотропии приводит к критическим индексам $z = 1.98(4)$ и $\beta/\nu = 0.122(2)$. Эти результаты в пределах погрешностей хорошо согласуются со значениями $z = 2$ и $\beta/\nu = \eta/2 = 0.125$, характерными для двумерной XY-модели.

При изучении двухвременных зависимостей автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w)$ были обнаружены эффекты старения, которые проявляются не только при

критической температуре, но и во всей низкотемпературной фазе. Кроме того, исследовано влияние температуры замораживания T_s на характер временного убывания этих характеристик в зависимости от начального состояния системы. Установлено, что при эволюции из низкотемпературного начального состояния автокорреляционная функция $C(t, t_w)$ демонстрирует более быстрое затухание и меньшую зависимость от времени ожидания t_w по сравнению с эволюцией из высокотемпературного состояния.

Также выявлены размерные эффекты, заключающиеся в ускорении убывания двухвременных характеристик с увеличением толщины пленок N . Были проведены расчеты предельного флуктуационно-диссипативного отношения X_∞ для структур с толщиной $N = 3, 11, 21$ при эволюции из высокотемпературного начального состояния и температуре замораживания $T_s = T_c$. Для $N = 3$ значение $X_\infty = 0.448(6)$ хорошо согласуется с результатом $X_\infty = 0.444(26)$ [51], полученным для двумерной XY-модели при температуре Березинского – Костерлица – Таулесса, что объясняется влиянием магнитной анизотропии, ориентирующей намагниченность в плоскости пленок. Для $N = 11$ значение $X_\infty = 0.432(9)$ близко к результату $X_\infty = 0.43(4)$ [52] для трехмерной XY-модели, а для $N = 21$ величина $X_\infty = 0.385(4)$ соответствует значению для трехмерной изотропной модели Гейзенберга $X_\infty = 0.383(6)$ [39, 53].

Дополнительно проведенные расчеты показали, что при температурах замораживания $T_s < T_c$ понижение температуры замораживания T_s приводит к уменьшению эффектов неравновесности, что отражается в изменении предельного флуктуационно-диссипативного отношения X_∞ .

ЛИТЕРАТУРА

1. C. A. F. Vaz, J. A. C. Bland, and G. Lauhoff, Rep. Prog. Phys. **71**, 056501 (2008).
2. *Ultrathin Magnetic Structures I*, ed. by J. A. C. Bland and B. Heinrich, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1994).
3. R. E. Rottmayer, S. Batra, D. Buechel et al., IEEE Trans. Magn. **42**, 2417 (2006).
4. M. A. Seigler, W. A. Challener, E. Gage et al., IEEE Trans. Magn. **44**, 119 (2008).
5. А. Ферг, УФН **178**, 1336 (2008).
6. G. Binash, P. Grunberg, F. Saurenbach, and W. Zinn, Phys. Rev. B **39**, 4828 (1989).
7. M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. N. Van Dau, F. Petro, P. Etienne, G. Creuzet, A. Friederich, and J. Chazelas, Phys. Rev. Lett. **61**, 2472 (1988).
8. R. B. Morgunov, G. L. L'vova, A. D. Talantsev, O. V. Koplak, T. Fache, and S. Mangin, J. Magn. Magn. Mater. **459**, 33 (2017).
9. G. Mihajlovic, N. Smith, T. Santos, J. Li, B. D. Terris, and J. A. Katine, Appl. Phys. Lett. **117**, 242404 (2020).
10. C. C. Huang, X. Zhou, and D. A. Hall, Sci. Rep. **7**, 45493 (2017).
11. J. Sarkar, *Sputtering Materials for VLSI and Thin Film Devices*, Elsevier, Amsterdam (2014).
12. M. T. Johnson, P. J. H. Bloemen, F. J. A. den Broeder, and J. J. de Vries, Rep. Prog. Phys. **59**, 1409 (1996).
13. T. Mukherjee, M. Pleimling, and Ch. Binek, Phys. Rev. B. **82**, 134425 (2010).
14. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Пуртов, М. В. Мамонова, Письма в ЖЭТФ **104**, 797 (2016).
15. E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J. P. Bouchaud, and L. F. Cugliandolo, Lect. Notes Phys. **492**, 184 (1997).
16. L. Berthier and P. C. W. Holdsworth, Europhys. Lett. **58**, 35 (2002).
17. L. F. Cugliandolo, *Slow Relaxation and Nonequilibrium Dynamics in Condensed Matter*, Les Houches, Ecole d'Été de Physique Théorique, vol. 77, ed. by J-L. Barrat et al., Berlin, Springer (2003), p. 371.
18. P. Calabrese and A. Gambassi, J. Phys. A **38**, R133 (2005).
19. M. Henkel and M. Pleimling, *Non-Equilibrium Phase Transitions, vol. 2: Ageing and Dynamical Scaling far from Equilibrium (Theoretical and Mathematical Physics)*, Springer (2010).
20. D. Herisson and M. Ocio, Phys. Rev. Lett. **88**, 257202 (2002).
21. D. Herisson and M. Ocio, Eur. Phys. J. B **40**, 283 (2004).
22. L. Berthier and J. Kurchan, Nature Phys. **9**, 310 (2013).
23. V. Dupuis, F. Bert, J. P. Bouchaud et al., Pramana J. Phys. **64**, 1109 (2005).

24. В. В. Прудников, П. В. Прудников, М. В. Мамонова, УФН **187**, 817 (2017).
25. В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, П. В. Прудников, *Фазовые переходы и методы их компьютерного моделирования*, Физматлит, Москва (2009).
26. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *Теоретические методы описания неравновесного критического поведения структурно неупорядоченных систем*, Физматлит, Москва (2013).
27. П. В. Прудников, В. В. Прудников, М. А. Медведева, Письма в ЖЭТФ **100**, 501 (2014).
28. P. V. Prudnikov, V. V. Prudnikov, M. A. Menshikova, and N. I. Piskunova, J. Magn. Magn. Mater. **387**, 77 (2015).
29. K. Binder and D. P. Landau, Phys. Rev. B **13**, 1140 (1976).
30. В. В. Прудников, П. В. Прудников, М. В. Мамонова, *Проблемы современного естествознания*, Изд-во Омского государственного университета, Омск (2019).
31. U. Wolff, Phys. Rev. Lett. **62**, 361 (1989).
32. J. S. Wang and R. H. Swendsen, Physica A **167**, 565 (1990).
33. M. Hennecke and U. Heyken, J. Stat. Phys. **72**, 829 (1993).
34. C. Chatelain, J. Phys. A **36**, 10739 (2003).
35. F. Ricci-Tersenghi, Phys. Rev. E **68**, 065104(R) (2003).
36. P. V. Prudnikov, V. V. Prudnikov, E. A. Pospelov, and A. S. Lyakh, J. Phys.: Conf. Ser. **1740**, 012004 (2021).
37. H. B. Callen and A. T. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
38. D. Mizuno, C. Tardin, C. F. Schmidt, and F. C. Mackintosh, *Nonequilibrium Mechanics of Active Cytoskeletal Networks*, Science **315**, 370 (2007).
39. P. Calabrese and A. Gambassi, Phys. Rev. E **65**, 066120 (2002).
40. L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, and G. Parisi, J. de Phys. **4**, 1641 (1994).
41. P. Calabrese, A. Gambassi, and F. Krzakala, J. Stat. Mech. P06016 (2006).
42. K. Binder, Z. Phys. B **43**, 119 (1981).
43. K. Binder, Phys. Rev. Lett. **47**, 693 (1981).
44. K. Binder and E. Luijten, Phys. Rep. **344**, 179 (2001).
45. L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
46. S. T. Bramwell, J.-Y. Fortin, P. C. W Holdsworth, S. Peysson, J.-F. Pinton, B. Portelli, and M. Sellitto, Phys. Rev. E **63**, 041106 (2001).
47. S. T. Bramwell and P. C. W Holdsworth, J. Appl. Phys. **73**, 6096 (1993).
48. N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
49. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980).
50. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. С. Лях, ФТТ **62**, 735 (2020).
51. П. В. Прудников, В. В. Прудников, И. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **101**, 596 (2015).
52. S. Abriet and D. Karevski, Eur. Phys. J. B **41**, 79 (2004).
53. V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, E. A. Pospelov, and A. S. Lyakh, J. Phys.: Conf. Ser. **1740**, 012004 (2021).