

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРОНТА НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

*А. М. Камчатнов**

*Институт спектроскопии Российской академии наук
108840, Москва, Троицк, Россия*

Поступила в редакцию 24 апреля 2026 г.,
после переработки 8 мая 2026 г.
Принята к публикации 8 мая 2026 г.

Найдено простое автомодельное решение модуляционных уравнений Уизема, описывающих эволюцию огибающих однофазных периодических волн, подчиняющихся обобщенному уравнению Клейна – Гордона. Это решение интерпретируется как волна разрушения неустойчивого состояния при его переходе в устойчивое, если в начальное неустойчивое состояние внесено локализованное возмущение.

Ключевые слова: фронт неустойчивости, теория модуляций, солитоны

DOI: 10.31857/S0044451026070101

1. ВВЕДЕНИЕ

Если состояние какой-либо протяженной физической системы неустойчиво, то оно переходит в устойчивое состояние с образованием волны, распространяющейся вглубь области неустойчивости. Впервые такого рода процессы рассматривались, по-видимому, при изучении распространения фронта кристаллизации в переохлажденном расплаве, фронта пламени, распространения нервного импульса или мутантного гена в популяции (см., например, [1, 2] и приведенные там ссылки). При этом было показано, что, хотя модельные нелинейные уравнения диффузии допускают много решений такого типа, при больших временах профиль волны стабилизируется, а ее скорость стремится к фиксированному значению, определяемому коэффициентом диффузии и видом нелинейности. Строгое доказательство существования такого выделенного значения скорости для достаточно общего вида нелинейных диффузионных уравнений было дано в работе [3], а ситуации, когда вместо плавного фронта формируется осциллирующая структура, огибающая которой распространяется с определенной скоростью, были рассмотрены, например, в работах [4–6]. В более общей формулировке можно пока-

зать, что достаточно произвольная начальная форма импульса трансформируется при большом времени эволюции в структуру с фиксированной скоростью фронта, если выполняется условие «маргинальной устойчивости» [4, 7]. Аналогичное условие для волновых систем, не обязательно являющихся диффузионными, было ранее сформулировано как условие перехода от абсолютной неустойчивости к конвективной (см., например, [8, 9]). Например, солитон, подчиняющийся нелинейному уравнению Шредингера (НУШ), неустойчив относительно изгибных возмущений [10], и, согласно этому условию, фронт разрушения солитона на вихри распространяется с минимальной групповой скоростью линейных волн [11, 12].

Если возникающая структура представляет собой волну из быстрых осцилляций с медленно изменяющимися вдоль нее параметрами, то для ее описания хорошо подходит теория модуляций Уизема [13, 14]. Хотя в случае неустойчивых состояний система модуляционных уравнений не допускает, строго говоря, постановку задачи с начальными условиями, автомодельные решения этой системы дают правильное значение скорости фронта и качественно совпадают с численными расчетами профиля структуры. Например, решение НУШ в виде однородной плоской волны модуляционно неустойчиво, и его локальное возмущение приводит к образованию промодулированной волновой структуры (см., например, [15–17]). Ее малоамплитудный край представ-

* E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

ляет собой фронт неустойчивости, распространяющийся, как и должно быть, с минимальной групповой скоростью, а на другом крае формируется последовательность солитонов с величиной амплитуды, подтверждаемой численными расчетами [18–21].

Однако существуют ситуации, когда имеется переход из неустойчивого состояния в устойчивое, но закон дисперсии линейных волн, распространяющихся по неустойчивому состоянию, не имеет точки перегиба, отвечающей минимуму групповой скорости. В качестве примера укажем струну, динамика которой подчиняется обобщенному уравнению Клейна–Гордона:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + U'(\varphi) = 0, \quad U' = \frac{dU}{d\varphi}, \quad U(0) = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(x, t)$ обозначает отклонение струны от некоторого равновесного состояния $\varphi = 0$. Если потенциал $U(\varphi)$ имеет минимум при $\varphi = 0$, то это состояние устойчиво по крайней мере для малых отклонений от равновесия. Представим себе, что в некоторый момент времени потенциал изменился так, что точка $\varphi = 0$ стала точкой его локального максимума, а ближайший минимум оказался, скажем, при $\varphi = 1$. Тогда локальное возмущение неустойчивого состояния $\varphi = 0$ приведет к образованию распространяющихся в противоположных направлениях волн, перемещающих струну из неустойчивого состояния в устойчивое с равновесием при $\varphi = 1$. Если в это уравнение включена вязкость, то эта задача может быть рассмотрена методом «маргинальной устойчивости» (см. [5]), однако решение не допускает перехода к пределу нулевой вязкости. Тем не менее, модуляционная теория Уизема остается применимой и в случае нулевой вязкости. В настоящей работе мы рассмотрим задачу о переходе струны, динамика которой подчиняется уравнению (1), из неустойчивого состояния в устойчивое с помощью метода Уизема.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И МОДУЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как хорошо известно, уравнение (1) имеет решение в виде бегущей волны $\varphi = \varphi(\xi)$, $\xi = x - Vt$, где $\varphi(\xi)$ определяется формулой

$$\xi = \sqrt{\frac{V^2 - 1}{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{A - U(\varphi)}}, \quad (2)$$

и мы положили для удобства $\varphi(0) = \varphi_0$. Переменная φ осциллирует между двумя точками поворота, которые являются двумя корнями уравнения

$A - U(\varphi) = 0$, так что эти корни определяют амплитуду осцилляций. В промодулированной волне эти корни, как и параметр A и фазовая скорость волны V , становятся медленными функциями x и t , а их динамика подчиняется модуляционным уравнениям Уизема, которые он вывел в работе [13]. Согласно работе Уизема, модуляционные уравнения удобно записать с помощью функции

$$W(V, A) = \sqrt{V^2 - 1} G(A), \quad (3)$$

$$G(A) = \sqrt{2} \oint \sqrt{A - U(\varphi)} d\varphi,$$

где интегрирование проводится по интервалу, в котором подкоренное выражение положительно: $A - U(\varphi) \geq 0$. Длина волны выражается с помощью этой функции формулой

$$L = \frac{\partial W}{\partial A} = \sqrt{V^2 - 1} G'(A), \quad (4)$$

где штрих обозначает дифференцирование по A . Тогда волновое число $k = 1/L$ и частота $\omega = kV$ связаны друг с другом законом дисперсии

$$\omega^2 = k^2 + (G'(A))^{-2}, \quad (5)$$

зависящим от амплитуды волны A . Следовательно, групповая скорость равна

$$v = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_A = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{V}. \quad (6)$$

Как ясно из уравнения (3), действительные решения существуют только при $V > 1$, так что физическая скорость v распространения сигнала всегда меньше единицы в согласии с релятивистской инвариантностью уравнения Клейна–Гордона (1).

Уизем вывел модуляционные уравнения в виде

$$\left(\frac{kV}{V^2 - 1} + A \right)_t + \left(\frac{kVW}{V^2 - 1} \right)_x = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{kVW}{V^2 - 1} \right)_t + \left(\frac{kV^2W}{V^2 - 1} - A \right)_x = 0.$$

Удобно исключить переменные W и V с помощью уравнений (3) и (6), так что мы получаем

$$\left(\frac{G/G'}{1 - v^2} + A - \frac{G}{G'} \right)_t + \left(\frac{(G/G')v}{1 - v^2} \right)_x = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{(G/G')v}{1 - v^2} \right)_t + \left(\frac{(G/G')v^2}{1 - v^2} - A + \frac{G}{G'} \right)_x = 0.$$

Линеаризация этих уравнения относительно малых отклонений A и v от постоянных фоновых значений дает характеристические скорости

$$v_{\pm} = \frac{v \pm c}{1 \pm vc}, \quad (9)$$

где c определяется выражением

$$c^2 = -GG''/(G')^2. \quad (10)$$

Если переменная c действительна, то уравнения (9) очевидным образом интерпретируются как скорости распространения звука по течению или против него, причем c играет роль скорости звука, и скорости складываются согласно релятивистскому закону сложения скоростей. В этом случае уравнения (8) могут быть представлены в виде уравнений релятивистской гидродинамики (см. [22]). Если же $c^2 < 0$ и характеристические скорости имеют комплексные значения, то это означает модуляционную неустойчивость волны с постоянной амплитудой, и нас интересует как раз такая ситуация.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Пусть сначала потенциал $U(\varphi)$ имеет минимум в точке $\varphi = 0$, причем потенциал растет монотонно с увеличением φ . Тогда состояние $\varphi = 0$, очевидно, устойчиво. Предположим, что в некоторый момент времени потенциал изменяется так, что $\varphi = 0$ становится точкой локального максимума, а ближайший минимум потенциала оказывается в точке $\varphi = \varphi_m$. Тогда состояние $\varphi = 0$ становится неустойчивым, и если мы возмутим это неустойчивое состояние в малой окрестности координаты $x = 0$, то от этой окрестности начнут распространяться вправо и влево волны, разрушающие это неустойчивое состояние, переводя систему в новое состояние с $\varphi = \varphi_m$. Мы предполагаем, что эти волны могут быть представлены промодулированным периодическим решением уравнения (1) аналогично ситуациям, рассмотренным в работах [18–21]. Тогда решение уравнений Уизема (8) даст нам профили амплитуды осцилляций A и групповой скорости v вдоль всей волновой структуры.

Предположение, что начальное возмущение локализовано в малой области, дает основания думать, что решение уравнений (8) быстро становится автономным, и из соображений размерности мы заключаем, что распределение групповой скорости дается формулой

$$v = x/t. \quad (11)$$

Кроме того, естественно предположить, что амплитудный параметр $A = A(x, t)$ зависит от x и t через посредство «релятивистски инвариантного» интервала $s^2 = t^2 - x^2$: $A = A(s)$. Сделав эти предположения, мы легко сводим каждое из уравнений (8) к

одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{G(A)}{G'(A)} + \frac{dA}{ds} = 0, \quad (12)$$

которое легко решается:

$$G(A) = \frac{C}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \quad (13)$$

где C — постоянная интегрирования. Эта формула определяет неявно зависимость амплитуды A от x и t . Условие применимости модуляционной теории Уизема при каком-либо конкретном выборе потенциала и, следовательно, функции $G(A)$ требует, чтобы в представляющий интерес интервал оси x укладывалось большое число осцилляций. Заменяя переменные x и t на x/ε и t/ε с малым $\varepsilon \ll 1$, мы можем сделать длину волны (4) настолько малой, что уже единичный интервал будет содержать большое число волн. Волновая структура такого размера обрывается за время порядка $t \sim 1$, так что мы можем считать, что уравнения Уизема написаны для новых «медленных» переменных, и $C \sim 1$. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим типичное решение с $C \sim 1$.

Проиллюстрируем наше решение конкретным примером с потенциалом

$$U(\varphi) = (\varphi^2 - 1)^2, \quad (14)$$

который имеет локальный максимум при $\varphi = 0$ и два локальных минимума при $\varphi = \pm 1$. Пусть наше возмущение вблизи точки $x = 0$ порождает волну, переводящую неустойчивое состояние с $\varphi = 0$ в устойчивое с $\varphi = 1$. В этом случае периодическое решение соответствует осцилляциям φ в интервале

$$a_- = \sqrt{2 - a_+^2} \leq \varphi \leq a_+, \quad (15)$$

где $1 < a_+ < \sqrt{2}$ и A связано с максимальной амплитудой колебаний a_+ соотношением

$$A = (a_+^2 - 1)^2. \quad (16)$$

Интеграл (3) сводится к табличным и его удобно выразить в виде функции от a_+ :

$$G(a_+) = \frac{4\sqrt{2}}{3} a_+ \{E(m) - (2 - a_+^2)K(m)\}, \quad (17)$$

где

$$m = 2 \left(1 - \frac{1}{a_+^2}\right), \quad (18)$$

$K(m)$ и $E(m)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Формула

$$G(a_+) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}} \quad (19)$$

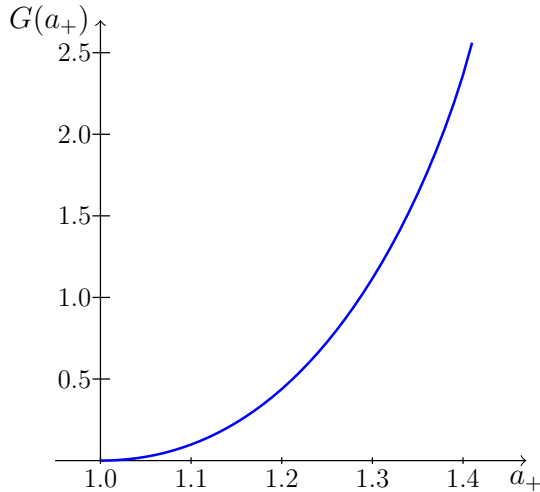


Рис. 1. Зависимость $G(a_+)$, определенная формулой (17)

определяет зависимость a_+ от x при фиксированном значении t для решения с $C = 1$.

График функции $G(a_+)$ показан на рис. 1. При $a_+ \rightarrow 1$ эта функция стремится к нулю как

$$G(a_+) \approx 2\sqrt{2}\pi(a_+ - 1)^2, \quad a_+ - 1 \ll 1, \quad (20)$$

а при $a_+ \rightarrow \sqrt{2}$ она стремится к максимальному значению $G(\sqrt{2}) = 8/3$. Отсюда следует, что область применимости формулы (19) ограничена условием

$$|x| \leq \sqrt{t^2 - 9/64}, \quad (21)$$

однако при больших t эта область практически совпадает с $|x| \leq t$.

Интеграл в решении (2) также выражается через неполный эллиптический интеграл первого рода, и его обращение дает решение в виде

$$\varphi = \sqrt{a_+^2 - 2(a_+^2 - 1)\text{sn}^2\left[\frac{\sqrt{2}a_+(vx - t)}{\sqrt{1 - v^2}}, m\right]}, \quad (22)$$

где sn — эллиптический синус Якоби и использовано соотношение $V = 1/v$ (см. (6)). После подстановки (11) получаем

$$\varphi = \sqrt{a_+^2 - 2(a_+^2 - 1)\text{sn}^2\left(a_+\sqrt{2(t^2 - x^2)}, m\right)}. \quad (23)$$

Здесь зависимость a_+ от x при фиксированном t известна из (19), так что выражение (23) определяет профиль возникающей волновой структуры в любой достаточно большой момент времени t , когда применима модуляционная теория Уизема.

Характерный профиль возникающей волновой структуры показан на рис. 2. Как мы видим, в центре структуры возникает область малых колебаний

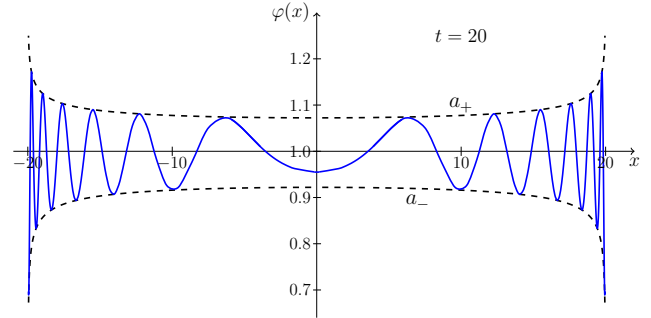


Рис. 2. Профиль волны (23), разрушающей неустойчивое состояние, при $t = 20$. Огибающие a_{\pm} , определяемые соотношениями (15) и (19), показаны штриховыми линиями

волны вблизи устойчивого состояния $\varphi = 1$. На краях структуры при $a_+ \rightarrow \sqrt{2}$ модуль эллиптической функции стремится к единице, $m \rightarrow 1$, и решение (22) формально превращается в солитонное:

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}[2(vx - t)/\sqrt{1 - v^2}]}. \quad (24)$$

Поскольку длина волны равна

$$L = \frac{\sqrt{2(1 - v^2)} K(m)}{v} \frac{K(m)}{a_+} = \frac{\sqrt{2}K(m)}{|x|a_+G(a_+)}, \quad (25)$$

она в основном уменьшается с ростом $|x|$, но на краях волновой структуры в экспоненциально узкой области с $\sqrt{2} - a_+ \lesssim \exp(-16|x|/3)$ растет благодаря логарифмическому росту эллиптического интеграла. Следует также отметить, что однородное состояние, по которому движутся формальные солитонные решения (24), неустойчиво, так что такие солитоноподобные импульсы существуют лишь как составная часть неоднородной структуры, быстро изменяющейся со временем как раз вследствие этой неустойчивости.

Штриховые линии на рис. 2 изображают огибающие a_+ и a_- в зависимости от x в фиксированный момент времени $t = 20$. Края структуры движутся со скоростью $v \simeq 1$, т. е. она расширяется со временем и все большую ее часть занимает область малых колебаний вблизи устойчивого состояния $\varphi = 1$. Рисунок 3 иллюстрирует рост структуры со временем.

Как видно из рис. 3, по мере расширения волновой структуры огибающие a_+ и a_- в ее центре постепенно приближаются к равновесному значению $\varphi = 1$. Неявная зависимость a_+ от t при $x = 0$ сразу следует из формулы (19):

$$G(a_+) = 1/t, \quad (26)$$

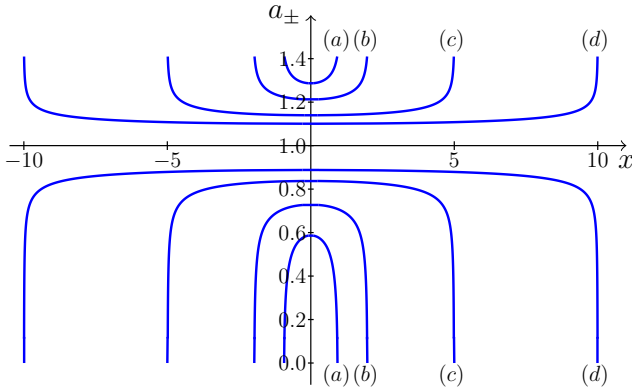


Рис. 3. Верхняя (a_+) и нижняя (a_-) огибающие профили волны (23) в различные моменты времени: $t = 1$ (a), $t = 2$ (b), $t = 5$ (c), $t = 10$ (d). На краях структуры при нашем выборе потенциала $U(\varphi)$ имеем $a_+ = \sqrt{2}$ и $a_- = 0$

а a_- находим из соотношения $a_- = (2 - a_+^2)^{1/2}$ (см. (15)). Как мы видим, приближение к малым колебаниям вблизи положения равновесия $\varphi = 1$ в центре структуры происходит довольно медленно. При асимптотически больших временах получаем

$$a_{\pm}(0, t) \approx 1 \pm \frac{1}{2^{3/4}\sqrt{\pi t}}. \quad (27)$$

На рис. 4 сплошной линией изображен график функции $a_+(0, t) - 1$ согласно формуле (26), а штриховой — согласно асимптотике (27). Асимптотическая формула дает неплохое приближение уже при временах $t \gtrsim 5$.

Как видно из графиков на рис. 3, значения огибающих a_{\pm} при достаточно больших временах практически постоянны вдоль почти всей волновой структуры за исключением ее краев. Поэтому формулу (27) можно использовать для оценок не только при $x = 0$, но и вдоль почти всей волны. В этом приближении длина волны вдоль волновой структуры изменяется как

$$L \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1-v^2}}{v} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t^2-x^2}}{x}. \quad (28)$$

Следовательно, число волн в этой области растет со временем согласно формуле

$$N \cong \int_{-t}^t \frac{dx}{L} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} t. \quad (29)$$

В модуляционной теории Уизема [13, 14] число волн сохраняется, поэтому источником волн, поступающих в центральную часть структуры, могут быть только края структуры, примыкающие к неустойчивому состоянию.

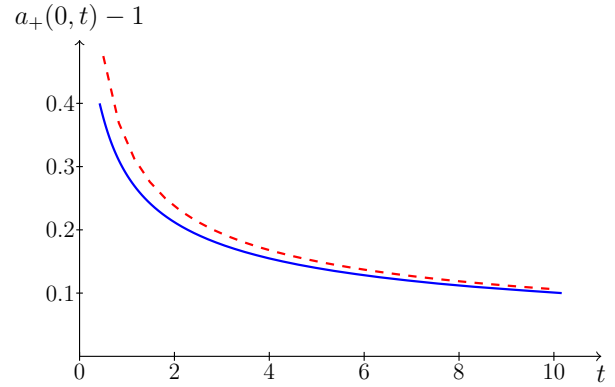


Рис. 4. Графики функции $a_+(0, t) - 1$, определенной формулой (26) (сплошная линия), и ее приближения асимптотической формулой (27) (штриховая линия)

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, модуляционные уравнения для неустойчивых систем являются эллиптическими и не допускают математически строгой постановки задачи с начальными условиями. Физически это проявляется в высокой чувствительности решений модуляционных уравнений к малым изменениям начальных условий, особенно если эти изменения имеют особенности, например, в виде изломов профиля. Тем не менее уже давно было замечено [23], что частные решения такого рода уравнений могут дать важную информацию о типичном характере эволюции хотя бы для некоторого класса начальных условий. Общеизвестным примером является задача о самофокусировке интенсивных пучков света в нелинейной среде. В этом случае достаточно широкие пучки описываются уравнениями «опрокинутой мелкой воды» с комплексными характеристическими скоростями, но частные решения этих уравнений широко используются для описания эволюции пучка до момента фокусировки (см., например, [24–26]). Аналогичную роль играют решения уравнений Уизема, описывающие формирование волновой структуры на резком фронте модуляционно неустойчивого импульса [18–21]. В настоящей работе мы дали новый пример эволюции волновой структуры в модуляционно неустойчивой системе, динамика которой подчиняется обобщенному уравнению Клейна–Гордона. Очевидно, что теория может быть приложена не только к моделям с потенциалом (14), но и к системам, описываемым уравнениями синус-Гордона [22] или сигнум-Гордона [27], имеющими важные физические приложения. Можно предположить, что теория Уизема найдет применения для

описания типичной эволюции возмущений и в других модуляционно неустойчивых системах.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. I. Trubetskov, E. S. Mchedlova, and L. V. Krasichkov, *Introduction to the Theory of Self-Organization of Open Systems*, Fizmatlit, Moscow (2002) [Д. И. Трубецков, Е. С. Мчедлова, Л. В. Красичков, *Введение в теорию самоорганизации открытых систем*, Физматлит, Москва (2002)].
2. A. Scott, *Nonlinear Science. Emergence and Dynamics of Coherent Structures*, Oxford Univ. Press (2003) [Э. Скотт, *Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур*, Физматлит, Москва (2007)].
3. A. Kolmogoroff, I. Petrovsky, and N. Piscounoff, *Study of the Diffusion Equation with Growth of the Quantity of Matter and Its Application to a Biology Problem*, Bulletin de l'Université d'État à Moscou, Ser. int., Sect. A, Vol. 1 (1937) [А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической задаче*, Бюллетень МГУ. Математика и механика, сер. А, **1**, 1 (1937)].
4. G. Dee and J. S. Langer, *Propagating Pattern Selection*, Phys. Rev. Lett. **50**, 383 (1983).
5. V. G. Kamenskii and S. V. Manakov, *Formation of Stability Regions from Unstable States in Dissipative Nonlinear Systems*, JETP Lett. **45**, 638 (1987) [В. Г. Каменский, С. В. Манаков, *Формирование областей устойчивости из неустойчивых состояний*, Письма в ЖЭТФ **45**, 499 (1987)].
6. A. I. Chernykh, I. R. Gabitov, and E. A. Kuznetsov, *Defects of One-Dimensional Vortex Lattices*, in *Singular Limits of Dispersive Waves*, Lyon (1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 315, Plenum, New York (1994).
7. W. van Saarloos, *Front Propagation into Unstable States*, Phys. Rep. **386**, 29 (2003).
8. R. J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas*, Res. Monogr. No. 29, MIT Press, Cambridge, Mass. (1964).
9. E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Elsevier Sci. (1995) [Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Физматлит, Москва (2001)].
10. E. A. Kuznetsov and S. K. Turitsyn, *Instability and Collapse of Solitons in Media with a Defocusing Nonlinearity*, Sov. Phys. JETP **67**, 1583 (1988) [Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, *Неустойчивость и коллапс солитонов в среде с дефокусирующей нелинейностью*, ЖЭТФ **94**, 119 (1988)].
11. A. M. Kamchatnov and L. P. Pitaevskii, *Stabilization of Solitons Generated by a Supersonic Flow of Bose-Einstein Condensate Past an Obstacle*, Phys. Rev. Lett. **100**, 160402 (2008).
12. A. M. Kamchatnov and S. V. Korneev, *Condition for Convective Instability of Dark Solitons*, Phys. Lett. A **375**, 2577 (2011).
13. G. B. Whitham, *Non-linear Dispersive Waves*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **283**, 238 (1965).
14. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974) [Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977)].
15. V. I. Karpman, *Self-Modulation of Nonlinear Plane Waves in Dispersive Media*, JETP Lett. **6**, 277 (1967) [В. И. Карпман, *Самомодуляция нелинейной плоской волны в диспергирующей среде*, Письма в ЖЭТФ **6**, 829 (1967)].
16. V. I. Karpman and E. M. Krushkal', *Modulated Waves in Nonlinear Dispersive Media*, Sov. Phys. JETP **28**, 277 (1968) [В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль, *Модулированные волны в нелинейных диспергирующих средах*, ЖЭТФ **55**, 530 (1968)].
17. V. I. Karpman, *Nonlinear Waves in Dispersive Media*, Pergamon Press (1974) [В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973)].
18. A. M. Kamchatnov, *Periodic Solutions and Whitham Equations for the Heisenberg Continuous Classical Spin Model*, Phys. Lett. A **162**, 389 (1992).
19. G. A. El, A. V. Gurevich, V. V. Khodorovskii, and L. A. Krylov, *Modulational Instability and Formation of a Nonlinear Oscillatory Structure in a "Focusing" Medium*, Phys. Lett. A **177**, 357 (1993).
20. R. F. Bikbaev and V. R. Kudashev, *Example of Shock Waves in Unstable Media: The Focusing Nonlinear Schrödinger Equation*, Phys. Lett. A **190**, 255 (1994).
21. A. M. Kamchatnov, *New Approach to Periodic Solutions of Integrable Equations and Nonlinear Theory of Modulation Instability*, Phys. Rep. **286**, 199 (1997).

22. A. M. Kamchatnov, *Evolution of Nonlinear Wave Pulses in the sine-Gordon Equation Theory*, JETP **136**, 653 (2023) [А. М. Камчатнов, *Эволюция нелинейных волновых импульсов в теории уравнения синус-Гордон*, ЖЭТФ **163**, 734 (2023)].
23. M. J. Lighthill, *Contribution to the Theory of Waves in Non-linear Dispersive Systems*, J. Inst. Math. Appl. **1**, 269 (1965).
24. V. I. Talanov, *Self-focusing of Optical Beams*, JETP Lett. **2**, 138 (1965) [В. И. Таланов, *О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах*, Письма в ЖЭТФ **2**, 218 (1965)].
25. S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, *Self-focusing and Self-trapping of Intense Light Beams in a Nonlinear Medium*, Sov. Phys. JETP **23**, 1025 (1966) [С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, *Самофокусировка и самозахват интенсивных световых пучков в нелинейной среде*, ЖЭТФ **50**, 1537 (1966)].
26. S. K. Zhdanov and B. A. Trubnikov, *Quasi-Gaseous Unstable Media*, Nauka, Moscow (1991) [С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991)].
27. F. M. Hahne, P. Klimas, and J. S. Streibel, *Decay of Shocklike Waves into Compact Oscillons*, Phys. Rev. D **101**, 076013 (2020).

Propagation of the Instability Front in the Theory of the Generalized Klein–Gordon Equation

A. M. Kamchatnov*

Institute of Spectroscopy of the Russian Academy of Sciences
108840, Moscow, Troitsk, Russia

*E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

Received April 24, 2026

Revised May 8, 2026

Accepted May 8, 2026

Abstract

A simple self-similar solution of the Whitham modulation equations was found, which describes the evolution of envelopes of one-phase periodic waves obeying the generalized Klein–Gordon equation. This solution is interpreted as an instability wave that transforms a locally disturbed unstable state into a stable one.

Keywords: instability front, modulation theory, solitons

Funding. This work was not sponsored.

Conflict of interest. The author declares that he has no conflicts of interest.