ЖЭТФ/JETP, 2026, том 170, вып. 6 (12), стр. 707–715 © 2026

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ ДЛЯ ЗАВИХРЕННОСТИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ПОЛОИДАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ

Е. А. Кузнецов [a,b], ***Е. А. Михайлов*** [a,c*], ***М. Г. Сердюков*** [c]

[a] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
119991, Москва, Россия

[b] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук*
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

[c] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Физический факультет*
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 сентября 2026 г.,
после переработки 6 октября 2026 г.
Принята к публикации 16 октября 2026 г.

С учетом предшествующих исследований для плоскопараллельных течений изучен процесс быстрого роста вмороженного поля завихренности в осесимметричном полоидальном течении. Приведены результаты численного моделирования с использованием суперкомпьютерных ресурсов. Показано, что на оси симметрии могут образовываться экспоненциально растущие градиенты скорости, в то время как градиенты завихренности растут по сверхэкспоненциальному закону. Продемонстрировано, что данные результаты качественно схожи с теми, что были получены для завихренности ранее в случае более простого двумерного течения.

Ключевые слова: уравнение Эйлера, завихренность, осесимметричное полоидальное течение, твердая граница, опрокидывание, коллапс, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0044451026120151

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема формирования особенностей в течениях невязкой несжимаемой жидкости является одной из ключевых задач современной гидродинамики. Она связана с механизмом передачи энергии от крупных масштабов к малым в развитой турбулентности. Согласно теории Колмогорова – Обухова, при больших числах Рейнольдса ($Re \gg 1$) в инерционном интервале флуктуации скорости на масштабе ℓ имеют порядок $\langle \delta v \rangle \sim \ell^{1/3}$, тогда как соответствующие флуктуации завихренности ведут себя как $\langle \delta\omega \rangle \sim \ell^{-2/3}$ [1, 2]. Поскольку характерное время передачи энергии остается конечным, такая расходимость при $\ell \to 0$ может указывать на возможность возникновения особенности завихренности за конечное время, т. е. коллапса в рамках уравнения Эйлера.

Вопрос о возможности коллапса в трехмерном уравнении Эйлера стоит давно. В 1984 г. в работе Била, Като и Майды [3] было получено, что необходимым и достаточным условием существования гладких решений трехмерного уравнения Эйлера для описания течений идеальных несжимаемых жидкостей на конечном интервале времени $[0, t_0]$ является ограниченность интеграла

$$\int_0^{t_0} \sup |\boldsymbol{\omega}|\, dt < \infty. \tag{1}$$

Здесь супремум $|\boldsymbol{\omega}|$ берется по всей области R^3 в предположении конечности скорости или при периодических граничных условиях. Если интеграл (1) расходится, то величина завихренности обращается в бесконечность за конечное время. Иными словами, условие (1) является критерием коллапса. Доказательство этого критерия основано на теореме [4].

Несмотря на многочисленные попытки численного моделирования, вопрос о существовании коллапса для трехмерных уравнений Эйлера остает-

* E-mail: e.mikhajlov@lebedev.ru

ся открытым (см. [5, 6]). Для двумерных уравнений Эйлера при гладких начальных условиях образование особенности за конечное время запрещено [7–9]. Впоследствии, уже после работы [3], Майда [10] показал, что аналогичное утверждение справедливо для осесимметричных течений без закрутки (при нулевой азимутальной скорости) в рамках трехмерного уравнения Эйлера.

Однако наличие указанных выше критериев не исключает формирования сингулярных структур за бесконечное время. Так, в двумерной гидродинамике численно наблюдалось образование профилей завихренности с экспоненциальным сужением их ширины [11]. В трехмерной геометрии аналогичные расчеты демонстрируют экспоненциальный рост завихренности в вихревых структурах типа «блинов» при одновременном экспоненциальном уменьшении их толщины [12–14].

Важную роль в этих процессах играет свойство вмороженности завихренности в жидкость. Для вмороженного в жидкость векторного поля $\boldsymbol{\omega}$ имеет место уравнение

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}[\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}], \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Хотя само течение является несжимаемым, линии вмороженного поля в общем случае могут сжиматься. Это может приводить к концентрации поля в малых областях и к росту его градиентов [15–17].

В двумерном случае завихренность имеет единственную ненулевую компоненту, перпендикулярную плоскости течения. Поэтому ее можно рассматривать как скалярную величину ω. В таком течении рост самой завихренности невозможен, поскольку ее эволюция описывается уравнением переноса

$$\partial_t \omega + (\mathbf{u}, \nabla)\omega = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

т. е. ω является лагранжевым инвариантом. Однако в этой конфигурации вмороженным векторным полем оказывается ротор завихренности (получивший англоязычное название «divorticity»),

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega},$$

для которого выполняется уравнение

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Поэтому за счет тех же механизмов сжатия возможен рост уже компонент ротора завихренности, хотя коллапс самой завихренности в двумерном случае невозможен.

Отметим, что во всех обсуждаемых выше работах не рассматривался вопрос о роли граничных условий, в частности на твердой поверхности, когда нормальная компонента скорости обращается в ноль при условии проскальзывания течения вдоль границы. Проскальзывающие течения оказываются сжимаемыми, им присущ рост градиентов скорости благодаря эффекту опрокидывания, хорошо известному в газодинамике. При этом сжимаемость проскальзывающих течений сопровождается появлением джетов в направлении, нормальном к границе. Как было показано в работе [18], в двумерном течении в диске, описываемом уравнением Эйлера, градиент скорости растет по экспоненциальному закону, достигая своего максимума на твердой границе, а градиент завихренности там же растет по дважды экспоненциальному закону. Более того, в двумерных течениях в областях с негладкой границей возможно образование особенности за конечное время при конечной кинетической энергии [19].

В наших предыдущих работах [20, 21] было показано, что для невязкого уравнения Прандтля как в двумерном ($d = 2$), так и в трехмерном ($d = 3$) случаях на твердой границе благодаря опрокидыванию проскальзывающего течения возможен взрывной рост градиента скорости как при $d = 2$, так и при $d = 3$ и соответственно образование особенности завихренности за конечное время при $d = 3$. В последнем случае коллапсирующее решение имеет трехмерную структуру типа торнадо, при котором особенность возникает на твердой границе. При этом взрывная генерация завихренности возникает благодаря всасыванию жидкости вихрем из приповерхностного слоя. В работе [21] нами также численно в рамках двумерного уравнения Эйлера был продемонстрирован экспоненциальный рост градиента скорости для течения между двумя параллельными твердыми поверхностями с максимумом на границе. Для градиента завихренности там же на твердой границе наблюдался рост по дважды экспоненциальному закону.

Основное направление данной работы — исследовать влияние геометрических факторов на рост градиентов скорости и завихренности на твердой границе цилиндра для осесимметричного полоидального несжимаемого течения, в котором завихренность концентрируется вблизи оси цилиндра. Такие течения представляют существенный интерес для приложений, прежде всего в задачах физики атмосферы.

В такой конфигурации из-за геометрии возникают дополнительные особенности, в частности из-за появления в операторе Лапласа членов с r^{-1} и r^{-2}. Это требует специфических подходов при числен-

ном моделировании, что приводит к использованию значительных вычислительных ресурсов.

В работе представлены результаты численного моделирования для пространственно-временных зависимостей завихренности, векторного потенциала скорости и поля скорости. На оси цилиндра вблизи границы наблюдается сверхэкспоненциальный рост градиента скорости, а градиент завихренности демонстрирует поведение, близкое к двойному экспоненциальному закону. Численный анализ предсказывает образование быстро сжимающейся струи на оси вблизи границы в рамках исследуемого тороидального вихря. Данный процесс может моделировать атмосферные процессы при конвективном образовании кучево-дождевых облаков, переносе примесей и т. д.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как отмечалось во Введении, в режиме развитой турбулентности, $Re \gg 1$, течение в инерционном интервале может быть описано в рамках безразмерного трехмерного уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\operatorname{grad} p,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость, p — давление, плотность среды ρ положена равной 1.

Рассмотрим осесимметричное, зависящее от радиальной координаты r, координаты z вдоль оси цилиндра и времени t течение внутри цилиндра радиуса R и высоты H. В данной работе мы ограничимся изучением динамики течений, имеющих только две компоненты скорости u_r и u_z. Именно для таких течений (в отсутствие азимутальной скорости, $u_\phi = 0$) Майда показал отсутствие коллапса [10], что стало естественным обобщением результатов [7–9] на осесимметричные течения. Отметим, что вопрос о влиянии границ на динамику вихрей в работе [10] не рассматривался.

В данном случае осесимметричного течения на две компоненты скорости мы имеем три уравнения. Первое — уравнение несжимаемости,

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r u_r = 0,$$

которое разрешим, вводя функцию тока Ψ,

$$u_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi). \tag{3}$$

Два других уравнения имеют вид

$$\frac{du_r}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r},\ \frac{du_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{4}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r\frac{\partial}{\partial r} + u_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

При $z = 0, H$ и $r = R$, на границе цилиндра, ставятся условия непротекания

$$u_z(z = 0, H) = 0,\ u_r(r = R) = 0.$$

В силу симметрии $u_r(r = 0) = 0$.

Легко видеть также, что у завихренности $\boldsymbol{\omega}$ для таких течений имеется только одна ненулевая азимутальная компонента

$$\omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

откуда в силу (3) получаем, как ω выражается через функцию тока

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Стоящий здесь оператор, действующий на Ψ, отличается с точностью до знака от оператора Лапласа дополнительным слагаемым r^{-2}.

Далее в уравнениях (4) исключим давление, переходя к уравнениям для завихренности ω и функции тока Ψ.

В невязкой среде завихренность является вмороженной величиной и подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}].$$

В данном случае для азимутальной компоненты завихренности ω это уравнение принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r\frac{\partial \omega}{\partial r} + u_z\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{r}u_r\omega. \tag{6}$$

Таким образом, система уравнений, описывающая течение, включает: уравнение переноса завихренности (6), уравнение связи ω и Ψ (5) и выражения для скорости (3) с начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + u_r\dfrac{\partial \omega}{\partial r} + u_z\dfrac{\partial \omega}{\partial z} = \dfrac{1}{r}u_r\omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r\Psi)}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \omega = 0, \\ \Psi|_{t=0} = f(r,z), \\ \Psi|_{r=0} = \Psi|_{r=R} = \Psi|_{z=0} = \Psi|_{z=H} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Граничные условия на Ψ следуют из условий непротекания на стенках цилиндра ($u_r|_{r=R} = 0$, $u_z|_{z=0} = u_z|_{z=H} = 0$). Одновременно накладывается условие осевой симметрии $u_r|_{r=0} = 0$.

Дифференцирование по z первого уравнения (7) дает уравнение для r-компоненты ротора завихренности $B_r = -\partial\omega/\partial z$:

$$\frac{dB_r}{dt} = -\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial z}B_r + \frac{1}{r}u_r B_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\omega.$$

На оси симметрии радиальная компонента скорости обращается в нуль, как и ее производная по z: $u_r = 0$, $\partial u_r/\partial z = 0$. Кроме того, при $r \to 0$, $z = 0$ и $z = H$ азимутальная компонента завихренности ω и z-компонента скорости также стремятся к нулю. В силу этого в данном случае уравнение для B_r принимает более простой вид:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -B_r\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{r}u_r\right).$$

Заметим, что если в некоторой окрестности $r = 0$ радиальная компонента скорости ведет себя как $u_r \sim r$, тогда на оси будет верно условие, следующее из равенства нулю дивергенции скорости

$$\frac{1}{r}u_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Если же в некоторой окрестности $r = 0$ радиальная компонента скорости ведет себя как $u_r \sim r^l$ $(l > 1)$, то

$$\frac{1}{r}u_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Тогда будет иметь место следующее равенство:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{r}u_r = \frac{3}{2}\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

В итоге в точках $(r, z) = (0, 0)$ и $(r, z) = (0, H)$ для B_r получаем

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{3}{2}B_r\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

или

$$B_r(t) = B_r(0)\exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_0^t \frac{\partial u_z}{\partial z}\,dt\right). \tag{8}$$

Кроме того, нами будет рассмотрен вопрос об адвекции пассивной примеси с концентрацией q. Предполагается, что примесь не влияет на динамику жидкости и переносится полем скорости $\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_z\mathbf{e}_z$. С учетом диссипации уравнение переноса примеси в цилиндрических координатах будет иметь вид [22]

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right), \tag{9}$$

где

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u_r\frac{\partial q}{\partial r} + u_z\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Из закона сохранения массы примеси и условия непротекания жидкости через границу на q накладываются условия Неймана на поверхности цилиндра

$$\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=H} = 0, \qquad \left.\frac{\partial q}{\partial r}\right|_{r=R} = 0. \tag{10}$$

В силу осевой симметрии на оси цилиндра $r = 0$ выполняется условие

$$\left.\frac{\partial q}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{11}$$

Начальное распределение примеси задается функцией, зависящей от r и z

$$q|_{t=0} = q_0(r, z). \tag{12}$$

Таким образом, после определения поля скорости из системы (7) перенос примеси описывается системой уравнений (9)–(12).

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Численное решение системы (7), (9)–(12) находилось с помощью разностных методов на равномерной сетке. Рассмотрим один шаг алгоритма. На текущем временном слое сначала вычисляются компоненты скорости u_r и u_z по формулам (3), затем по неявной разностной схеме для уравнения (6) определяются значения азимутальной компоненты завихренности ω в граничных и внутренних точках. Эллиптическое уравнение (5) решается методом установления с использованием эволюционно факторизованной схемы Розенброка с параметром 1/2 на логарифмическом наборе шагов. В конце делается шаг для параболического уравнения (9) так же с помощью эволюционно факторизованной схемы Розенброка с параметром 1/2 [23]. Контроль точности осуществлялся через сохранение кинетической энергии. Расчеты выполнялись на сетке из 10^8 пространственных узлов, при этом энергия сохранялась с точностью до шести значащих цифр.

Высокие градиенты, возникающие в задаче, требуют применения подробных сеток. Для повышения эффективности вычислений программная реализация алгоритма была распараллелена с использованием технологии MPI и выполнена на суперкомпьютере «Ломоносов-2».

В начальный момент времени течение представляет собой вихрь, закрученный по часовой стрелке в плоскости (r, z) (рис. 1, 2)

$$\Psi|_{t=0} = r(r - R)z(z - H), \quad R = 1, \quad H = 1.$$

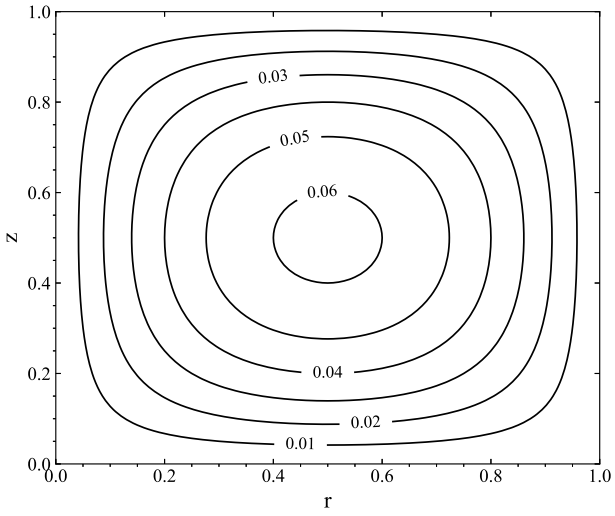


Рис. 1. Линии уровня азимутальной компоненты векторного потенциала Ψ в момент времени $t = 0$

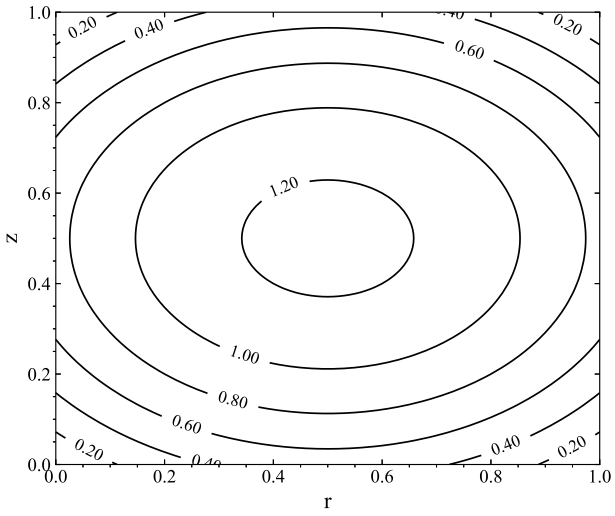


Рис. 2. Линии уровня азимутальной компоненты завихренности ω в момент времени $t = 0$

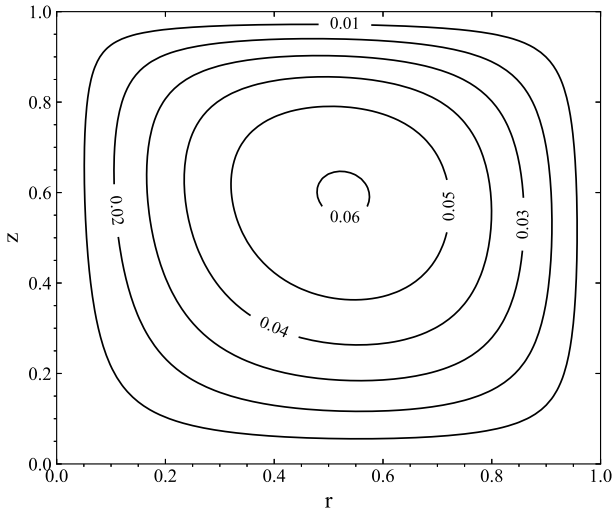


Рис. 3. Линии уровня функции тока Ψ в момент времени $t = 1.2$

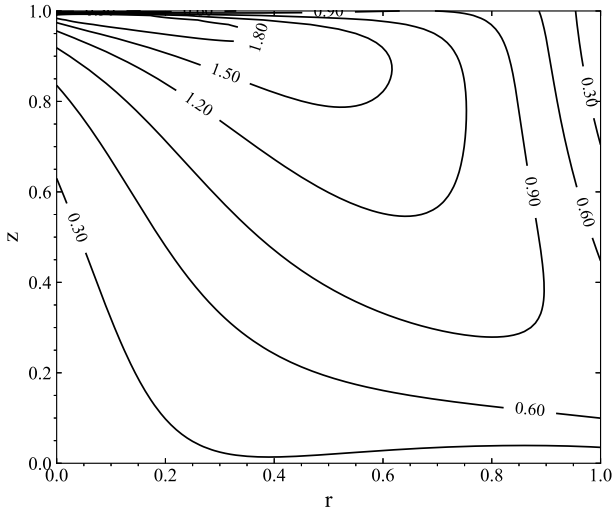


Рис. 4. Линии уровня ω в момент времени $t = 1.2$

Начальное распределение концентрации пассивной примеси задавалось следующим образом (рис. 5):

$$q|_{t=0} = (1 - r^4)^2 z^2 (1 - z)^2, \quad Re = 1000.$$

Результаты численного моделирования показывают, что течение (рис. 3, 4) вместе с примесью (рис. 6) переносится к верхней границе, оставаясь на оси. В окрестности верхнего торца цилиндра наблюдается процесс, схожий с опрокидыванием (рис. 7). Как видно на рис. 9, производная z-компоненты скорости растет по сверхэкспоненциальному закону и за время эволюции увеличивается в 14.5 раза. В то же время для азимутальной компоненты завихренности ω наблюдается сильное сжатие характеристических линий (рис. 8). На рис. 10 представлена эволюция производной азимутальной компоненты завихренности. Видно, что она растет по закону, близкому к двойной экспоненте, и за время эволюции увеличивается более чем в $2 \cdot 10^4$ раз.

Также нами были проведены расчеты с аналогичными начальными условиями, но с противоположным знаком, т. е. вихрь был закручен против часовой стрелки. В этом случае течение концентрировалось на оси вблизи нижней границы. Однако вследствие симметрии начальных условий абсолют-

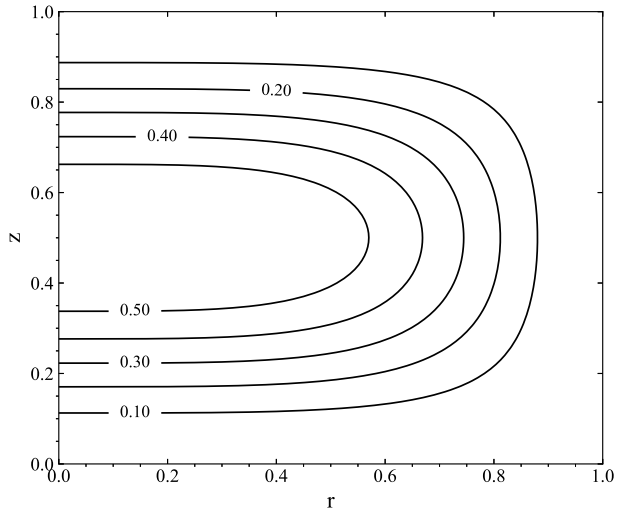


Рис. 5. Линии уровня концентрации q в момент времени $t = 0$

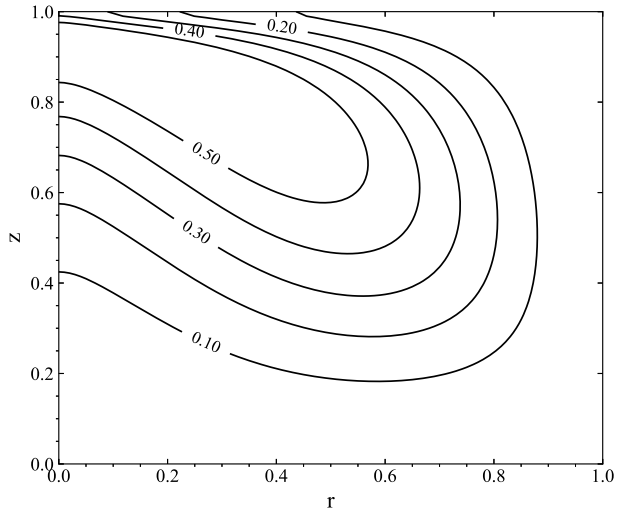


Рис. 6. Линии уровня концентрации q в момент времени $t = 1.2$

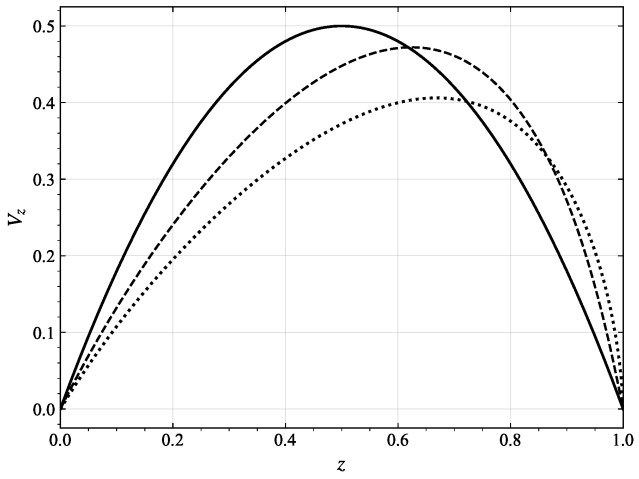


Рис. 7. z-компонента скорости на оси цилиндра в различные моменты времени: $t = 0$ — сплошная линия, $t = 0.6$ — штриховая линия и $t = 1.2$ — пунктирная линия

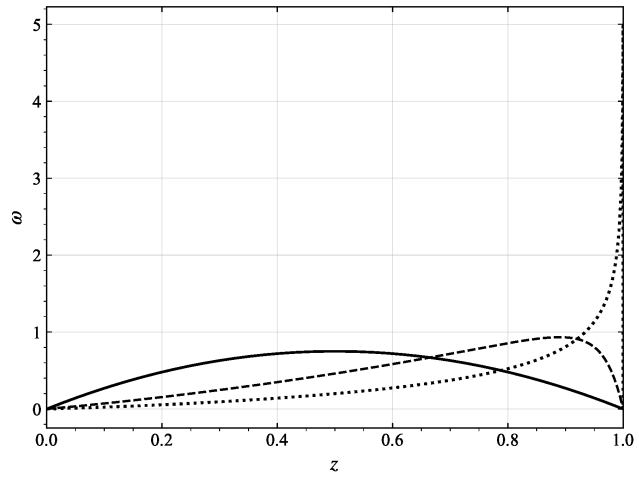


Рис. 8. Азимутальная компонента завихренности на оси цилиндра в различные моменты времени: $t = 0$ — сплошная линия, $t = 0.6$ — штриховая линия и $t = 1.2$ — пунктирная линия

ные значения производных в нижнем левом углу совпадают со значениями производных, представленными на рис. 9 и 10, с точностью до 13 знаков. Отметим, что в численном смысле под производными на оси симметрии понимались величины, вычисленные с использованием значений функций в узлах сетки, соседних с угловыми.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано полоидальное невязкое течение при отсутствии азимутального вращения в цилиндре с жесткими границами. В результате численного моделирования были получены зависимости завихренности, векторного потенциала скорости и поля скорости. На оси цилиндра вблизи границы наблюдается сверхэкспоненциальный рост градиента скорости, а градиент завихренности демонстрирует поведение, близкое к двойному экспоненциальному закону. Численный анализ предсказывает образование быстро сжимающейся струи на оси вблизи границы в рамках исследуемого тороидального вихря. Дополнительно нами показано, что пассивная примесь в таком течении переносится к верхней границе, оставаясь около оси, т. е. максимальные

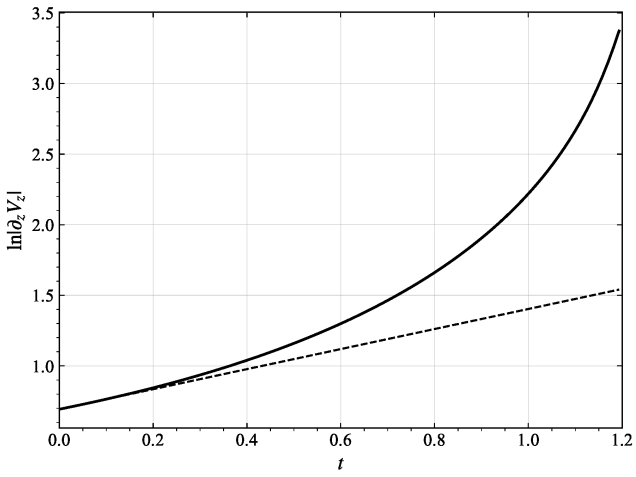


Рис. 9. Производная z-компоненты скорости по z в точке $r = 0$, $z = 1$ в зависимости от времени в логарифмическом масштабе — сплошная линия; экспоненциальная аппроксимация начальных моментов времени — штриховая линия

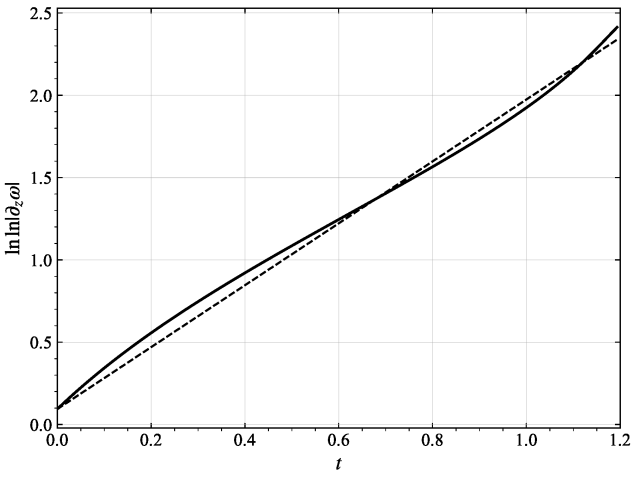


Рис. 10. Производная азимутальной компоненты завихренности по z при $z = 1$ около оси симметрии в зависимости от времени в двойном логарифмическом масштабе: сплошная линия — посчитанная численно, штриховая линия — двойная экспоненциальная аппроксимация, вычисленная с использованием формулы (8)

значения концентрации достигаются в той же области, где наблюдается формирование быстро сжимающейся струи.

Таким образом, численное моделирование для осесимметрического полоидального течения, несмотря на геометрический фактор, подтвердило основной тезис, сформулированный в нашей предыдущей работе о влиянии твердой плоской границы на формирование экспоненциального роста градиентов скорости и сверхэкспоненциального роста градиента завихренности для двумерного уравнения Эйлера [21]. Данная работа представляет собой промежуточный этап в более сложной задаче о формировании вихревых структур типа торнадо. На следующем этапе рассматриваются два варианта численного моделирования. Первый состоит в исследовании вихревых течений в геометрии (r, z) с учетом азимутальной компоненты скорости. Другой вариант, более приближенный к реализации вихревых структур типа торнадо, заключается в численном решении трехмерного течения между двумя плоскостями $z = 0$ и $z = h$ с периодическими граничными условиями в поперечном направлении. Эта задача могла бы быть решена с применением быстрого синус-преобразования Фурье по z с условием непротекания при $z = 0$ и $z = h$ ($v_z = 0$) и быстрого преобразования Фурье по поперечным координатам.

Самым главным моментом данной работы является подтверждение концепции о формировании особенности (за конечное или бесконечное время) за счет опрокидывания проскальзывающего течения вдоль твердой границы, что является стимулом для решения более амбициозных задач. В заключение хотелось бы отметить, что в численных экспериментах Луо и Хоу для осесимметричного течения внутри цилиндра постоянного радиуса (с периодическими условиями по z вдоль оси цилиндра) был обнаружен взрывной рост завихренности на твердой границе [24]. Несмотря на некоторые математические исследования [25, 26], главным остается вопрос, является ли коллапс в этом эксперименте следствием опрокидывания проскальзывающего течения или нет. Отметим, что авторы [25, 26] рассмотрели течение вне цилиндра, хотя они и показали, что в этом случае возникает особенность завихренности на границе цилиндра. В недавней работе [27] было получено обобщение данных результатов и построение асимптотического решения для коллапса в трехмерной идеальной гидродинамике. Отдельно стоит упомянуть задачи, в которых учитывается конечная вязкость. Так, в [28] показано, что в таком случае формируется филамент для завихренности, но этот процесс носит пороговый характер, реализуясь лишь при определенных значениях параметров. Следует отметить также, что в настоящее время все большую популярность приобретает использование нейросетевых подходов. Так, в работе [29] показана возможность их применения для решения трехмерных уравнений Эйлера и двумерных уравнений Буссинеска. Первое приближение для решения строится как гладкая функция, удовлетворяющая условиям

задачи. После чего с использованием методов искусственного интеллекта она уточняется и получается решение, демонстрирующее взрывной рост в обоих случаях.

Благодарности. Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Е. А. Кузнецов — общая формулировка задачи, обоснование уравнений и анализ их решений, подготовка текста. Е. А. Михайлов — формулировка задачи для численного моделирования, начальных и граничных условий, подготовка текста. М. Г. Сердюков — реализация предложенных подходов, подготовка графиков и текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. N. Kolmogorov, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **30**, 301 (1941) [А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 299 (1941)].
2. A. M. Obukhov, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **32**, 19 (1941) [А. М. Обухов, ДАН СССР **32**, 22 (1941)].
3. J. T. Beale, T. Kato, and A. J. Majda, Commun. Math. Phys. **94**, 61 (1984).
4. T. Kato, J. Funct. Anal. **9**, 296 (1972).
5. D. Chae, in *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations*, ed. by C. M. Dafermos and M. Pokorný, Elsevier, Amsterdam (2008), Vol. 4, p. 1.
6. J. D. Gibbon, Physica D **237**, 1894 (2008).
7. W. Wolibner, Math. Z. **37**, 698 (1933).
8. T. Kato, Arch. Ration. Mech. Anal. **25**, 188 (1967).
9. V. I. Yudovich, USSR Comput. Math. Math. Phys. **3**, 1407 (1963) [В. И. Юдович, ЖВМиМФ **3**, 1032 (1963)].
10. A. Majda, Vorticity and the Mathematical Theory of Incompressible Fluid Flow, Commun. Pure Appl. Math. **39**, S187 (1986).
11. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. Juul Rasmussen, Phys. Fluids **19**, 105110 (2007).
12. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **27**, 085102 (2015).
13. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, JETP Lett. **104**, 685 (2016) [Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Письма в ЖЭТФ **104**, 695 (2016)].
14. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, J. Fluid Mech. **813**, R1 (2017).
15. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, JETP Lett. **67**, 1076 (1998) [Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998)].
16. E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, Phys. Rev. E **61**, 831 (2000).
17. E. A. Kuznetsov, JETP Lett. **76**, 346 (2002) [Е. А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **76**, 406 (2002)].
18. A. Kiselev and V. Šverák, Ann. Math. **180**, 1205 (2014).
19. A. Kiselev and A. Zlatoš, J. Differ. Equ. **259**, 3490 (2015).
20. E. A. Kuznetsov and E. A. Mikhailov, Ann. Phys. **447**, 169088 (2022).
21. E. A. Kuznetsov, E. A. Mikhailov, and M. G. Serdyukov, Radiophys. Quantum Electron. **66**, 129 (2023) [Е. А. Кузнецов, Е. А. Михайлов, М. Г. Сердюков, Изв. вузов. Радиофизика **66**, 145 (2023)].
22. G. V. Kotov and S. P. Fisenko, J. Eng. Phys. Thermophys. **84**, 579 (2011) [Г. В. Котов, С. П. Фисенко, ИФЖ **84**, 535 (2011)].
23. N. N. Kalitkin and P. V. Koryakin, *Numerical Analysis*, in *Methods of Mathematical Physics*, Academia, Moscow (2013) [Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин, *Численные методы. Кн. 2. Методы математической физики*, Академия, Москва (2013)].
24. G. Luo and T. Y. Hou, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **111**, 12968 (2014).
25. T. M. Elgindi and I.-J. Jeong, Ann. PDE **5**, 16 (2019).
26. T. M. Elgindi and I.-J. Jeong, Ann. PDE **6**, 5 (2020).
27. D. Córdoba, L. Martínez-Zoroa, and F. Zheng, Ann. PDE **11**, 19 (2025).
28. T. Schorlepp, V. Rosenhaus, and G. Falkovich, arXiv:2609.13056.
29. Y. Wang, C.-Y. Lai, J. Gómez-Serrano, and T. Buckmaster, Phys. Rev. Lett. **130**, 244002 (2023); arXiv:2201.06780.

Formation of a Vorticity Singularity in an Axisymmetric Poloidal Flow

E. A. Kuznetsov [a,b], ***E. A. Mikhailov*** [a,c*], ***M. G. Serdyukov*** [c]

[a] P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
119991, Moscow, Russia

[b] L. D. Landau Institute for Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences
142432, Chernogolovka, Moscow Region, Russia

[c] Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University
119991, Moscow, Russia

[*]E-mail: e.mikhajlov@lebedev.ru

Received September 10, 2026
Revised October 6, 2026
Accepted October 16, 2026

Abstract

Based on previous studies of plane-parallel flows, we investigate the rapid growth of the frozen-in vorticity field in an axisymmetric poloidal flow. We present the results of numerical simulations performed using supercomputing resources. We show that exponentially growing velocity gradients can develop on the axis of symmetry, while vorticity gradients grow superexponentially. These results are qualitatively similar to those previously obtained for vorticity in the simpler case of two-dimensional flow.

Keywords: Euler equation, vorticity, axisymmetric poloidal flow, solid boundary, overturning, collapse, numerical simulation

Acknowledgements. This work was carried out using the equipment of the Center for Collective Use of High-Performance Computing Resources at M. V. Lomonosov Moscow State University.

Funding. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' contributions. E. A. Kuznetsov — general problem formulation, derivation of the equations and analysis of their solutions, preparation of the text. E. A. Mikhailov — formulation of the problem for numerical modeling, initial and boundary conditions, preparation of the text. M. G. Serdyukov — implementation of the proposed approaches, preparation of figures and text.